وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة ابن خلدون – تيارت

كلِّية العلوم الاقتصادية، العلوم التجارية وعلوم التسيير

محاضرات وأعمال موجهة لطلبة السنة الثانية ليسانس

علوم اقتصادية، علوم تجارية وعلوم التسيير

المقياس:

الإحصاء 03

STAT 03

من إعداد: الدكتور دحو عبد الكريم

أكتوبر 2019

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين

وبعد

اتسعت استخدامات الإحصاء والتوزيعات الاحتمالية، وأصبحت مادة رئيسية وهامة للاقتصادي والاجتماعي والمهندس والطبيب وغيرهم، ودخلت في كافة العلوم، وأصبحت تدرس في المدارس والجامعات.

ونظراً لأهمية هذا الموضوع ارتأيت أن أضع بين طلبتنا الأعزاء هذه المطبوعة لتتناسب مع المتطلبات المبدئية للدراسة في مجال السنة الثانية ليسانس نظام جديد؛ علوم اقتصادية، علوم تجارية وعلوم التسيير.

وعلى ذلك فقد حاولت جاهداً التبسيط والإلمام بالمفاهيم وأسلوب العرض ما أمكن ليسهل للطالب الذي يدرس مقياس الإحصاء 03 لأول مرة التعامل معها.

وقد ركزت هذه المطبوعة على المقرر الخاص بمادة الإحصاء 03 المتعلق بالدروس مع تمارين وحلولها وكذا عرض مختلف الامتحانات التي قدمت للطلبة خلال ثلاث سنوات متتالية سابقة.

واتساقاً مع الهدف من إعداد هذه المطبوعة فقد قسمت المادة العلمية الواردة فيها إلى محورين أساسيين كالتالي:

المحور الأول: توزيعات المعاينة Distributions d'échantillonnage

1- توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{x}$ من مجتمع طبيعي

2- توزيع المعاينة للفرق بين وسطين $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ من مجتمع طبيعي

3- توزيع المعاينة للنسبة $\hat{p}$ من مجتمع طبيعي

4- توزيع المعاينة للفرق بين نسبتين $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ من مجتمع طبيعي

المحور الثاني: الاستدلال الإحصائي Inférence statistique

1- التقدير Estimation

أ- التقدير النقطي Estimation en points

ب- التقدير بفترة ثقة Estimation par intervalle de confiance

2- اختبار الفرضيات Test d'hypothèses

توزيعات المعاينة Distributions d'échantillonnage

نظرية المعاينة Théorie d'échantillonnage

إن الدراسة الإحصائية للمتغير الذي يُقترن بظاهرة معينة في المجتمع تكون في بعض الأحيان مستحيلة أو مكلفة وتحتاج إلى جهد ووقت طويل، لأن المجتمع يُعبر عن جميع المفردات التي يمكن أن يأخذها هذا المتغير. لذلك نضطر لاختيار عينة، أي جزء من المجتمع وبالتالي إجراء الدراسة على كلّ مفردة من أجل التوصل إلى خواص هذا المجتمع.

العينة Echantillon

تعبر العينة عن مجموعة جزئية من مفردات المجتمع الإحصائي، يتم جمعها لتمثل كلّ مفردات المجتمع المطلوب إجراء دراسة إحصائية عليه.

إذا رمزنا لحجم المجتمع بـ: N، فإن احتمال اختيار أي مفردة يساوي $\frac{1}{N}$.

يمكن اختيار العينة العشوائية البسيطة بالإرجاع أي إرجاع وحدة المعاينة المسحوبة قبل سحب العينة التي تليها أو اختيارها بدون إرجاع وحدة المعاينة المسحوبة قبل سحب العينة التي تليها.

توزيع المعاينة Distribution d'échantillonnage

يخضع المجتمع الذي تُؤخذ منه العينة لتوزيع معين يعبر عن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الذي يمثل وحدات ذلك المجتمع.

يُمثل التوزيع الاحتمالي أو توزيع المعاينة لكلّ قيمة تحسب في العينة بثوابت أو معلمات. فمثلاً إذا كان المجتمع يخضع لتوزيع ذي الحدين Distribution de Binomiale، فإن المعلمة هي احتمال النجاح p. وإذا كان يخضع لتوزيع بواسون Distribution de Poison، فإن المعلمة هي المتوسط λ. أما إذا كان هذا المجتمع يخضع للتوزيع الطبيعي، فإن المعلمتين هما الوسط الحسابي m والانحراف المعياري δ.

وباستخدام هذه المعالم يمكن إيجاد جميع الاحتمالات المتوقعة لهذا المجتمع.

توزيع المعاينة Distribution d'échantillonnage

يخضع المجتمع الذي تُؤخذ منه العينة لتوزيع معين يعبر عن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الذي يمثل وحدات ذلك المجتمع.

إذا كان x متغير عشوائي يمثل وحدات المجتمع ويخضع لتوزيع احتمالي وسطه الحسابي m وتباينه δ^2 وكان $\bar{x}$ يمثل الوسط الحسابي لعينة حجمها n والتي تمثل مجموعة جزئية من هذا المجتمع، فإن **توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{x}$ يقترب من التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x بوسط حسابي: $m_{\bar{x}} = m$ وبانحراف معياري: $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}}$.**

1– توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{x}$ من مجتمع طبيعي

إذا كان توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{x}$ يقترب من التوزيع الطبيعي، فيمكن تعريف دالة كثافته الاحتمالية كالآتي:

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{\sigma_{\bar{x}}\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{x}-m_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}}\right)^2}$$

حيث $m_{\bar{x}}$ و $\sigma_{\bar{x}}$ يمثلان على التوالي المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{x}$.

وحيث يمكن إيجاد الاحتمال $\Pr(b < \bar{x} < a)$ بوضع: $z = \frac{\bar{x} - m_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}}$ للانتقال من التوزيع الطبيعي إلى التوزيع الطبيعي المعياري.

<u>مثال1</u>: ليكن x متغير عشوائي يُقترن بأوزان الطلاب في جامعة ما؛ هذا المتغير يخضع للتوزيع الطبيعي بوسط حسابي 70 كلغ وبانحراف معياري 10 كلغ.

نسحب عينة عشوائية من أوزان هؤلاء الطلاب حجمها 25 طالباً.

1– أوجد توزيع المعاينة للوسط الحسابي لهذه العينة.

2– أحسب احتمال أن يقل متوسط أوزان الطلاب عن 75 كلغ.

الحلّ:

1- إيجاد توزيع المعاينة للوسط الحسابي لهذه العينة:

توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{x}$ (متوسط أوزان الطلاب في هذه الجامعة) يقترب من التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي x بوسط حسابي: $m_{\bar{x}} = m = 70\ kg$ وبانحراف معياري: $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = 2\ kg$.

2- حساب احتمال أن يقل متوسط أوزان الطلاب عن 75 كلغ:

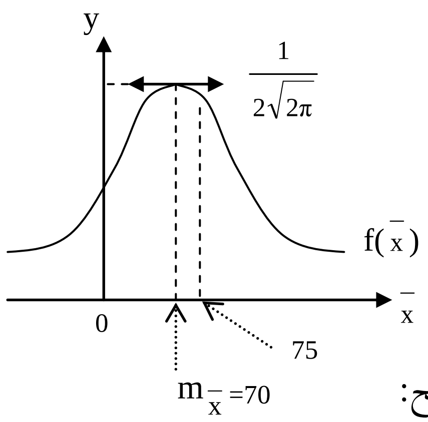
بما أن توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{x}$ يقترب من التوزيع الطبيعي، فيمكن تعريف دالة كثافته الاحتمالية كالآتي:

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{\sigma_{\bar{x}}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{x}-m_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}}\right)^2}$$

حيث $m_{\bar{x}}$ و $\sigma_{\bar{x}}$ يمثلان على التوالي المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{x}$.

وعليه، فإن احتمال أن يقل متوسط لأوزان الطلاب عن 75 كلغ يمكن حسابه كالتالي:

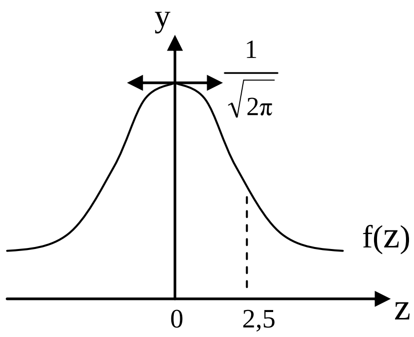
$$Pr(\bar{x} < 75) = \int_{-\infty}^{75} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{x}-70}{2}\right)^2} d\bar{x}$$



نضع: $z = \frac{\bar{x}-70}{2}$، فيصبح:

$$dz = \frac{1}{2} d\bar{x} \Rightarrow d\bar{x} = 2dz$$

$$Pr(\bar{x} < 75) = \int_{-\infty}^{\frac{75-10}{2}} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$



من الشكل نلاحظ أن:

$$\Pr(\bar{x} < 75) = \int_{-\infty}^{2,5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz = \Phi(2,5)$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ نجد:

$$\mathbf{\Pr(\bar{x} < 75) = 0,9938}$$

وهو احتمال أن يقل متوسط وزن الطلاب عن 75 كلغ.

مثال2: ليكن x متغير عشوائي يُقترن بعلامات مقياس بحوث العمليات لطلاب السنة الثانية علوم تجارية؛ هذا المتغير يخضع للتوزيع الطبيعي بوسط حسابي 12 وبانحراف معياري 5.

نسحب عينة عشوائية من علامات هؤلاء الطلاب حجمها 64 طالباً.

1– أوجد توزيع المعاينة للوسط الحسابي لهذه العينة.

2– أحسب احتمال أن يزيد متوسط علامات الطلاب عن 10.

الحلّ:

1– إيجاد توزيع المعاينة للوسط الحسابي لهذه العينة:

توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{x}$ (متوسط علامات الطلاب في مقياس بحوث العمليات) يقترب من التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي x بوسط حسابي: $\mathbf{m_{\bar{x}} = m = 12}$ وبانحراف معياري: $\sigma_{\bar{x}} = \mathbf{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{64}} = 0,625}$.

2- حساب احتمال أن يزيد متوسط علامات الطلاب عن 10:

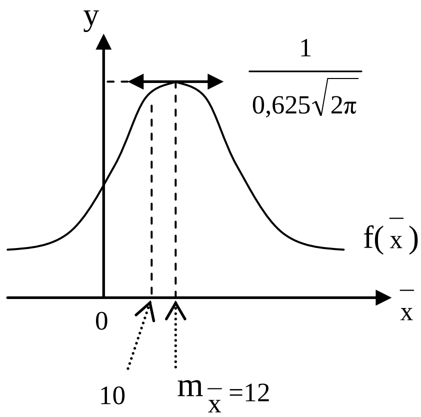
بما أن توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{x}$ يقترب من التوزيع الطبيعي، فيمكن تعريف دالة كثافته الاحتمالية كالآتي:

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{\sigma_{\bar{x}}\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{x}-m_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}}\right)^2}$$

حيث $m_{\bar{x}}$ و $\sigma_{\bar{x}}$ يمثلان على التوالي المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{x}$.

وعليه، فإن احتمال أن يزيد متوسط علامات الطلاب عن 10 يمكن حسابه كالتالي:

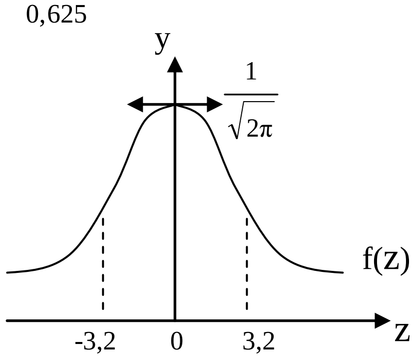
$$\Pr(\bar{x} > 10) = \int_{10}^{+\infty} \frac{1}{0{,}625\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{x}-12}{0{,}625}\right)^2} d\bar{x}$$



نضع: $z = \frac{\bar{x}-12}{0{,}625}$، فيصبح:

$$dz = \frac{1}{0{,}625} d\bar{x} \Rightarrow d\bar{x} = 0{,}625dz$$

$$\Pr(\bar{x} > 10) = \int_{\frac{10-12}{0{,}625}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \int_{-3{,}2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$



من الشكل نلاحظ أن:

$$\Pr(\overline{x} > 10) = \int_{-\infty}^{3,2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \Phi(3,2)$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ نجد:

$$\mathbf{\Pr(\overline{x} > 10) = 0,9993}$$

وهو احتمال أن يزيد متوسط علامات الطلاب عن 10.

في كثير من الحالات يكون التوزيع الاحتمالي للمجتمع الأصلي غير طبيعي ويتطلب الأمر معرفة التوزيع الاحتمالي للوسط الحسابي $\overline{x}$. وللتسهيل سوف نستخدم مجتمعاً منفصلاً منظماً يتكون من القيم: 1، 2، 3 و4 والذي متوسطه الحسابي:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N} = \frac{1+2+3+4}{4}$$

$$\mathbf{m = 2,5}$$

وانحرافه المعياري:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{4}(x_i - m)^2}{N}}$$

x_i	$x_i - m$	$(x_i - m)^2$
1	– 1,5	2,25
2	– 0,5	0,25
3	0,5	0,25
4	1,5	2,25
Total	0	5

$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{\frac{5}{4}} \approx 1,118}$$

•- بفرض أنه تم اختيار كلّ العينات من الحجم $n = 2$ من هذا المجتمع **بإرجاع**.

كلّ العينات التي يمكن اختيارها (عددها: $N^n = 4^2 = 16$) من هذا المجتمع. وهي كالتالي:

11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34
41	42	43	44

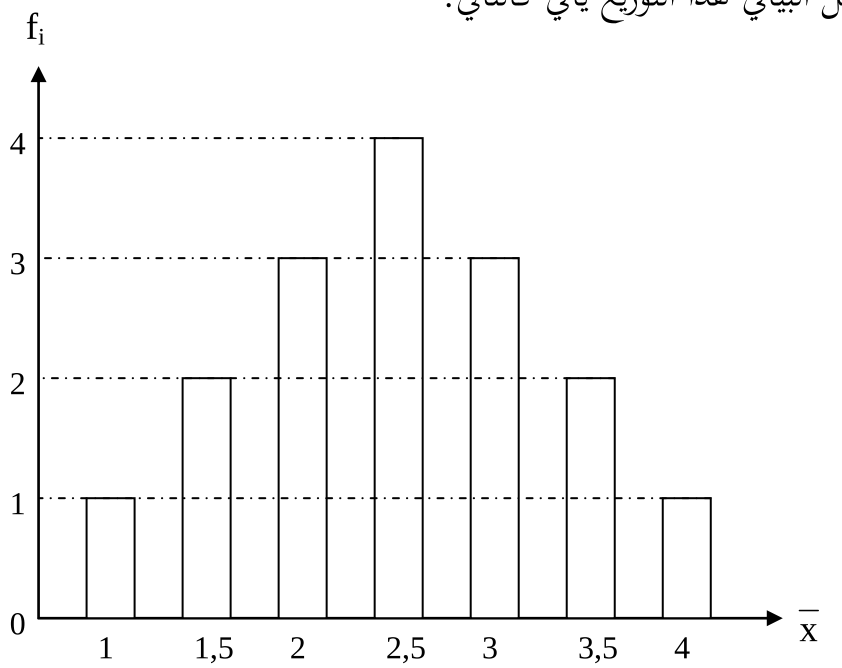
كلّ عينة من 16 عينة هذه تقبل متوسط حسابي $\bar{x}$ كالتالي:

1	1,5	2	2,5
1,5	2	2,5	3
2	2,5	3	3,5
2,5	3	3,5	4

التوزيع التكراري لمجتمع متوسط العينات الذي حجم كلّ منها $n = 2$ يأتي كالتالي:

$\bar{x}$	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
f_i	1	2	3	4	3	2	1

التمثيل البياني لهذا التوزيع يأتي كالتالي:



نلاحظ أن توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{x}$ في حالة السحب بإرجاع من مجتمع محدود قريب من التوزيع الطبيعي.

يمكن إيجاد المتوسط الحسابي $m_{\bar{x}}$ والانحراف المعياري $\sigma_{\bar{x}}$ للتوزيع من الجدول التكراري كالتالي:

$$m_{\bar{x}} = m = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

$\bar{x}_i$	f_i	$f_i\ \bar{x}_i$	$f_i\ \bar{x}_i^{\,2}$
1	1	1	1
1,5	2	3	4,5
2	3	6	12
2,5	4	10	25
3	3	9	27
3,5	2	7	24,5
4	1	4	16
Total	16	40	110

$$\mathbf{m_{\bar{x}} = m = \frac{40}{16} = 2{,}5}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \bar{x}_i^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} - m_{\bar{x}}^2}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{110}{16} - (2{,}5)^2}$$

$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{0{,}625}}$$

كما يمكن إيجاد الانحراف المعياري $\sigma_{\bar{x}}$ باستخدام الصيغة التالية:

$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\frac{5}{4}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{5}{4}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{8}} = \sqrt{\mathbf{0{,}625}}$$

إذا أُختيرت كلّ العينات الممكنة من الحجم n بإرجاع من مجتمع محدود من الحجم N وله متوسط حسابي m وانحراف معياري σ، فإن توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{x}$ يقترب من التوزيع

الطبيعي بمتوسط حسابي $m_{\bar{x}} = m$ وبانحراف معياري $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ عندما يكون حجم العينة $n \geq 30$.

<u>مثال</u>: مجتمع مُكون من المفردات الآتية:

3، 3، 3، 6، 7، 7، 8، 8، و9.

نختار عينة عشوائية من الحجم $n = 37$ من هذا المجتمع بإرجاع.

1– أوجد توزيع المعاينة للوسط الحسابي لمفردات هذه العينة العشوائية.

2– أحسب احتمال أن يقل المتوسط الحسابي لمفردات هذه العينة العشوائية عن 5.

<u>الحلّ</u>:

1– إيجاد توزيع المعاينة للوسط الحسابي لمفردات هذه العينة العشوائية:

المتوسط الحسابي للمجتمع:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N} = \frac{3+3+3+6+7+7+8+8+9}{9} = \frac{54}{9}$$

$$\mathbf{m = 6}$$

الانحراف المعياري للمجتمع:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{9}(x_i - m)^2}{N}}$$

x_i	$x_i - m$	$(x_i - m)^2$
3	– 3	9
3	– 3	9
3	– 3	9
6	0	0
7	1	1
7	1	1
8	2	4
8	2	4
9	3	9
Total	0	46

$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{\frac{46}{9}} \approx 2{,}261}$$

ليكن x متغير عشوائي يُقترن بالمفردات. وحيث أن حجم العينة العشوائية المختارة العينة $n > 30$، فإن توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{x}$ (متوسط المفردات) يقترب من التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي x بوسط حسابي: $\mathbf{m_{\bar{x}} = m = 6}$ وبانحراف معياري:

$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}261}{\sqrt{37}} = 0{,}372}$$

2- حساب احتمال أن يقل المتوسط الحسابي لمفردات هذه العينة العشوائية عن 5:

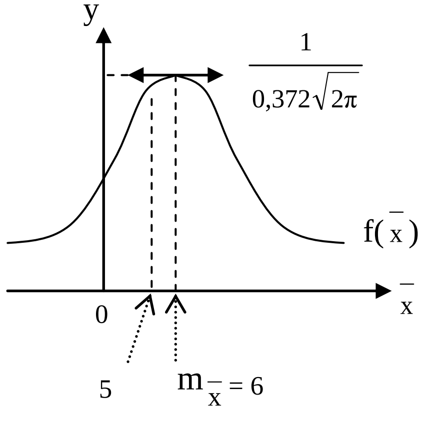
بما أن توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{x}$ يقترب من التوزيع الطبيعي، فيمكن تعريف دالة كثافته الاحتمالية كالآتي:

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{\sigma_{\bar{x}}\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{x}-m_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}}\right)^2}$$

حيث $m_{\bar{x}}$ و $\sigma_{\bar{x}}$ يمثلان على التوالي المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{x}$.

وعليه، فإن احتمال أن يقل المتوسط الحسابي لمفردات هذه العينة العشوائية عن 5 يمكن حسابه كالتالي:

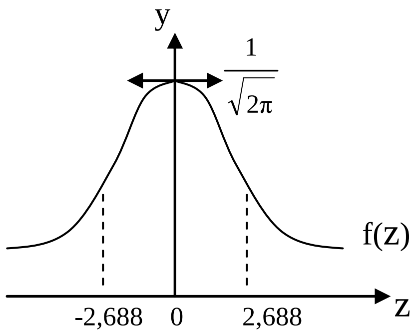
$$\Pr(\bar{x} < 5) = \int_{-\infty}^{5} \frac{1}{0{,}372\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{x}-6}{0{,}372}\right)^2} d\bar{x}$$



نضع: $z = \frac{\bar{x} - 6}{0{,}372}$، فيصبح:

$$dz = \frac{1}{0,372} d\bar{x} \Rightarrow d\bar{x} = 0,372dz$$

$$\Pr(\bar{x} < 5) = \int_{-\infty}^{\frac{5-6}{0,372}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \int_{-\infty}^{-2,688} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$



من الشكل نلاحظ أن:

$$\Pr(\bar{x} < 5) = \int_{2,688}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1 - \int_{-\infty}^{2,688} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1 - \Phi(2,688)$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ نجد:

$$\mathbf{Pr(\bar{x} < 5) = 1 - 0,9963 = 0,0037}$$

وهو احتمال أن يقل المتوسط الحسابي لمفردات هذه العينة العشوائية عن 5.

- بفرض أنه تم اختيار كلّ العينات من الحجم $n = 2$ من مجتمعنا المنتظم السابق والذي يتكون من القيم: 1، 2، 3 و4 ولكن **بدون إرجاع**.

كلّ العينات التي يمكن اختيارها (عددها: $C_N^n = C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$) من هذا المجتمع.

وهي كالتالي:

12	13	14
	23	24
		34

كلّ عينة من 6 عينات هذه تقبل متوسط حسابي $\bar{x}$ كالتالي:

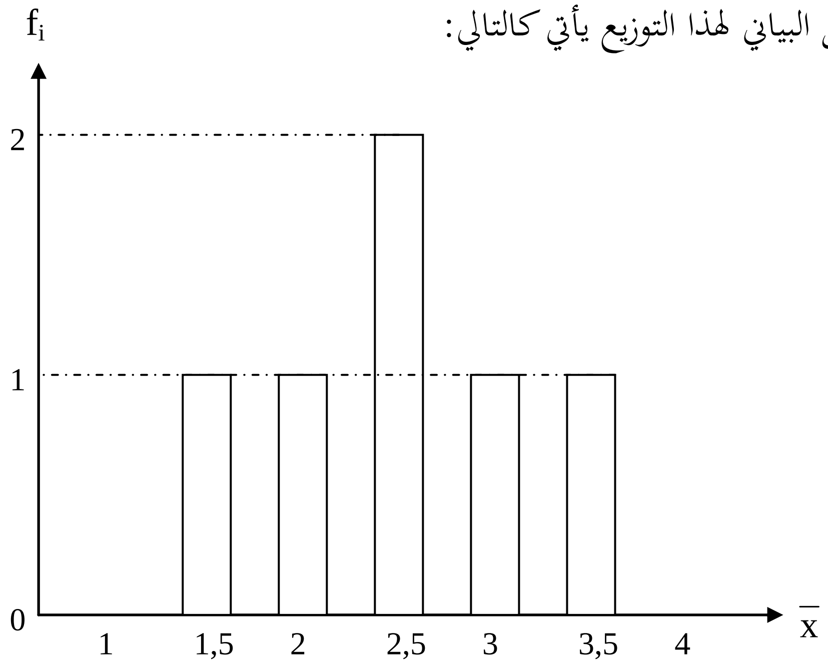
1,5	2	2,5
	2,5	3
		3,5

وبذلك نتحصل على توزيع المعاينة للمتوسطات $\overline{x}_i$.

التوزيع التكراري لمجتمع متوسط العينات الذي حجم كلّ منها $n = 2$ يأتي كالتالي:

$\overline{x}$	1,5	2	2,5	3	3,5
f_i	1	1	2	1	1

التمثيل البياني لهذا التوزيع يأتي كالتالي:



نلاحظ أن توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\overline{x}$ في حالة السحب بدون إرجاع من مجتمع محدود بعيداً عن التوزيع الطبيعي.

يمكن إيجاد المتوسط الحسابي $m_{\overline{x}}$ والانحراف المعياري $\sigma_{\overline{x}}$ للتوزيع من الجدول التكراري كالتالي:

$$m_{\overline{x}} = m = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \overline{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

$\bar{x}_i$	f_i	$f_i\ \bar{x}_i$	$f_i\ \bar{x}_i^2$
1,5	1	1,5	2,25
2	1	2	4
2,5	2	5	12,5
3	1	3	9
3,5	1	3,5	12,25
Total	6	15	40

$$\mathbf{m_{\bar{x}} = m = \frac{15}{6} = 2,5}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \bar{x}_i^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} - m_{\bar{x}}^2}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{40}{6} - (2,5)^2}$$

$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{x}}} = \sqrt{\frac{\mathbf{2,5}}{\mathbf{6}}} \approx \mathbf{0,645}$$

كما يمكن إيجاد الانحراف المعياري $\delta_{\bar{x}}$ باستخدام الصيغة التالية:

$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{\sqrt{\frac{5}{4}}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{4-2}{4-1}} = \frac{\sqrt{\frac{5}{4}}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{12}}} \approx \mathbf{0,645}$$

إذا أُختيرت كلّ العينات الممكنة من الحجم n بدون إرجاع من مجتمع محدود من الحجم N وله متوسط حسابي m وانحراف معياري σ، فإن توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{x}$ يقترب من التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي $m_{\bar{x}} = m$ وبانحراف معياري $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ عندما يكون حجم العينة $n \geq 30$.

يُسمى المقدار $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ بمعامل التصحيح.

إذا كان حجم العينة صغيراً جداً بالنسبة لحجم المجتمع، فإن $\frac{N-n}{N-1}$ تكون قريبة من 1 ويمكن إسقاطها من المعادلة. وقد جرت العادة على إهمال هذا الحد عندما تكون $n < 0,05N$.

مثال: مجتمع مُكون من المفردات الآتية:

3، 3، 3، 6، 7، 8، 9، 9، 9، و13.

1– أحسب متوسط المجتمع m وانحرافه المعياري δ.

2– أحسب متوسط مجتمع العينات $m_{\bar{x}}$ وانحرافه المعياري $\sigma_{\bar{x}}$ عندما يكون حجم العينة المختارة من هذا المجتمع n = 2 بدون إرجاع.

الحلّ:

1– حساب متوسط المجتمع m وانحرافه المعياري σ:

المتوسط الحسابي للمجتمع:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N} = \frac{3+3+3+6+7+8+9+9+9+13}{10}$$

$$\mathbf{m = 7}$$

الانحراف المعياري للمجتمع:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{4}(x_i - m)^2}{N}}$$

x_i	$x_i - m$	$(x_i - m)^2$
3	– 4	16
3	– 4	16
3	– 4	16
6	– 1	1
7	0	0
8	1	1
9	2	4
9	2	4
9	2	4
13	6	36
Total	0	98

$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{\frac{98}{10}} = \sqrt{9,8} \approx 3,130}$$

2- حساب متوسط مجتمع العينات $m_{\bar{x}}$ وانحرافه المعياري $\sigma_{\bar{x}}$ عندما يكون حجم العينة المختارة من هذا المجتمع n = 2 بدون إرجاع:

متوسط مجتمع العينات $m_{\bar{x}}$: $\mathbf{m_{\bar{x}} = m = 7}$

الانحراف المعياري لمجتمع العينات $\sigma_{\bar{x}}$:

حيث أن $n = 2$ و$0,05N = 0,05(10) = 0,5$، فإن $n > 0,05N$.

وبالتالي لا يمكننا إهمال معامل التصحيح $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ في صيغة حساب $\sigma_{\bar{x}}$.

وعلى ذلك يكون:

$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} = \frac{\sqrt{\frac{98}{10}}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{10-2}{10-1}} = \frac{\sqrt{\frac{98}{10}}}{\sqrt{2}}.\sqrt{\frac{8}{9}} = \boldsymbol{\frac{14}{3\sqrt{5}} \approx 2,087}$$

2– توزيع المعاينة للفرق بين وسطين $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ من مجتمع طبيعي

إذا كان لدينا مجتمعين يخضعان للتوزيع الطبيعي؛ الأول بمتوسط m_1 وبتباين σ_1^2 والمجتمع الثاني بمتوسط m_2 وبتباين σ_2^2 واخترنا عينة عشوائية حجمها n_1 من المجتمع الأول متوسطها $\bar{x}_1$ وعينة عشوائية حجمها n_2 من المجتمع الثاني متوسطها $\bar{x}_2$، فإن توزيع المعاينة للفرق بين المتوسطين $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ يتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي: $m_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = m_1 - m_2$،

وبانحراف معياري: $\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

إذا كان توزيع المعاينة للفرق بين وسطين $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ يقترب من التوزيع الطبيعي، فيمكن تعريف دالة كثافته الاحتمالية كالآتي:

$$f(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \frac{1}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - m_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}\right]^2}$$

حيث $m_{\bar{x}1-\bar{x}2}$ و $\sigma_{\bar{x}1-\bar{x}2}$ يمثلان على التوالي المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للفرق بين وسطين $\bar{x}1$ $\bar{x}2$ –.

وحيث يمكن إيجاد الاحتمال $\Pr(b < \bar{x}1 - \bar{x}2 < a)$ بوضع: $z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - m_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}$ للانتقال من التوزيع الطبيعي إلى التوزيع الطبيعي المعياري.

مثال: نختار عينة من الأجور الشهرية لعمال الشركة A حجمها 36 عاملاً بمتوسط حسابي 250 دينار وبانحراف معياري 6 دينار ونختار عينة أخرى من الأجور الشهرية لعمال الشركة B حجمها 80 عاملاً بمتوسط حسابي 200 دينار وبانحراف معياري 10 دينار.

1– أوجد توزيع المعاينة للفرق بين الوسطين.

2– أحسب احتمال أن يقل الفرق بين متوسط الأجور المدفوعة من قبل الشركة A ومتوسط الأجور المدفوعة من قبل الشركة B عن 53 دينار.

ملاحظة:

المتغير العشوائي الذي يُقترن بأجور العمال الشهرية في هذين الشركتين يخضع لقانون التوزيع الطبيعي.

الحلّ:

	الشركة A	**الشركة B**
حجم العينة	$n_1 = 36$	$n_2 = 36$
الوسط الحسابي	$m_1 = 250$	$m_2 = 250$
الانحراف المعياري	$\sigma_1 = 6$	$\sigma_2 = 6$

1– إيجاد توزيع المعاينة للفرق بين الوسطين:

للفرق بين وسطين $\bar{x}1$ $\bar{x}2$ – يقترب

توزيع المعاينة للفرق بين المتوسطين $\bar{x}A$ $\bar{x}B$ – (الفرق بين متوسط الأجور المدفوعة من قبل الشركة A ومتوسط الأجور المدفوعة من قبل الشركة B) يقترب من التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي x بوسط حسابي: $\mathbf{m_{\bar{x}1-\bar{x}2}} = m_A - m_B =$، $= 250 - 200 = \mathbf{50}$

وبانحراف معياري: $\sigma_{\bar{x}1-\bar{x}2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{x}1-\bar{x}2}} = \sqrt{\frac{6^2}{36}+\frac{10^2}{80}} = \sqrt{2{,}25} = \mathbf{1{,}5}$$

2- حساب احتمال أن يقل الفرق بين متوسط الأجور المدفوعة من قبل الشركة A ومتوسط الأجور المدفوعة من قبل الشركة B عن 53 دينار:

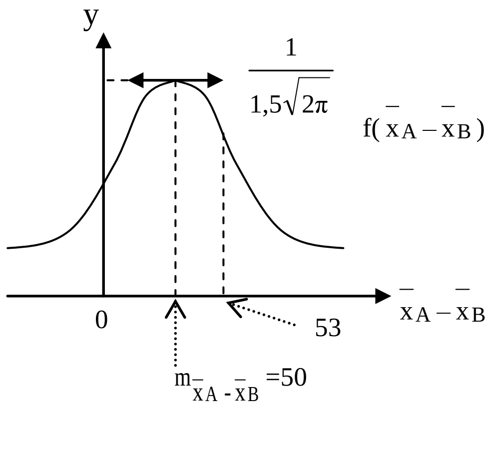
بما أن توزيع المعاينة للفرق بين المتوسطين $m_A - m_B$ يقترب من التوزيع الطبيعي، فيمكن تعريف دالة كثافته الاحتمالية كالآتي:

$$f(\bar{x}_A-\bar{x}_B) = \frac{1}{\sigma_{\bar{x}_A-\bar{x}_B}\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(\bar{x}_A-\bar{x}_B)-m_{\bar{x}_A-\bar{x}_B}}{\sigma_{\bar{x}_A-\bar{x}_B}}\right]^2}$$

حيث $m_{\bar{x}_A-\bar{x}_B}$ و $\sigma_{\bar{x}_A-\bar{x}_B}$ يمثلان على التوالي المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للفرق بين الوسطين $\bar{x}_A - \bar{x}_B$.

وعليه، فإن احتمال أن يقل الفرق بين متوسط الأجور المدفوعة من قبل الشركة A ومتوسط الأجور المدفوعة من قبل الشركة B عن 53 دينار يمكن حسابه كالتالي:

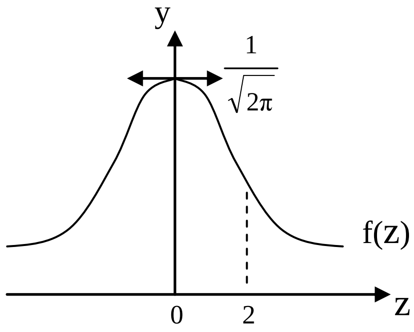
$$\Pr\left[(\bar{x}_A-\bar{x}_B) < 53\right] = \int_{-\infty}^{53} \frac{1}{1{,}5\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(\bar{x}_A-\bar{x}_B)-50}{1{,}5}\right]^2} d(\bar{x}_A-\bar{x}_B)$$



نضع: $z = \frac{(\bar{x}_A - \bar{x}_B) - 50}{1,5}$ ، فيصبح:

$$dz = \frac{1}{1,5} d(\bar{x}_A - \bar{x}_B) \Rightarrow d(\bar{x}_A - \bar{x}_B) = 1,5dz$$

$$\Pr\left[(\bar{x}_A - \bar{x}_B) < 53\right] = \int_{-\infty}^{\frac{53-50}{1,5}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \int_{-\infty}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \Phi(2)$$



وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ نجد:

$$\Pr\left[(\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}}) < 53\right] = 0,9772$$

وهو احتمال أن يقل الفرق بين متوسط الأجور المدفوعة من قبل الشركة A ومتوسط الأجور المدفوعة من قبل الشركة B عن 53 دينار.

3– توزيع المعاينة للنسبة $\hat{p}$ من مجتمع طبيعي

إذا كان x متغير عشوائي يُقترن بعدد النجاحات في العينات ذات الحجم n ويخضع لتوزيع ذي الحدين $B(n,\ p)$ بوسط حسابي $m = np$ وبتباين $\sigma = npq$، حيث تُمثل p احتمال النجاح وq احتمال الفشل.

بما أن احتمال النجاح p مختلف من عينة إلى أخرى، فيمكن تعريف نسبة النجاحات كالتالي: $\hat{p} = \frac{x}{n}$.

إن توزيع المعاينة لنسبة النجاحات $\hat{p}$ يقترب من التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي x بوسط حسابي: $m_{\hat{p}} = E(\frac{x}{n}) = \frac{np}{n} = p$

وبانحراف معياري: $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{v(\hat{p})} = \sqrt{v(\frac{x}{n})} = \sqrt{\frac{npq}{n^2}} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$.

بما أن توزيع المعاينة لنسبة النجاحات $\hat{p}$ يقترب من التوزيع الطبيعي، فيمكن تعريف دالة كثافته الاحتمالية كالتالي:

$$f(\hat{p}) = \frac{1}{\sigma_{\hat{p}}\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{p} - m_{\hat{p}}}{\sigma_{\hat{p}}}\right)^2}$$

حيث $m_{\hat{p}}$ و $\sigma_{\hat{p}}$ يمثلان على التوالي المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة لنسبة النجاحات $\hat{p}$.

وحيث يمكن إيجاد الاحتمال $Pr(b < \hat{p} < a)$ بوضع: $z = \frac{\hat{p} - m_{\hat{p}}}{\sigma_{\hat{p}}}$ للانتقال من التوزيع الطبيعي إلى التوزيع الطبيعي المعياري.

مثال: ليكن احتمال نجاح الطالب في مسابقة الدخول إلى السنة الأولى ماجستير علوم التسيير 0,3.

سُحِبت عينة عشوائية حجمها 84 طالباً؛ أوجد احتمال أن تكون نسبة النجاحات ما بين 0,15 و0,20.

الحلّ:

إيجاد احتمال أن تكون نسبة النجاحات ما بين 0,15 و0,20:

توزيع المعاينة لنسبة النجاحات $\hat{p}$ يقترب من التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي x بوسط حسابي: $\mathbf{m_{\hat{p}}} = p = \mathbf{0,3}$

وبانحراف معياري: $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{(0,3)(0,7)}{84}} = 0,05$.

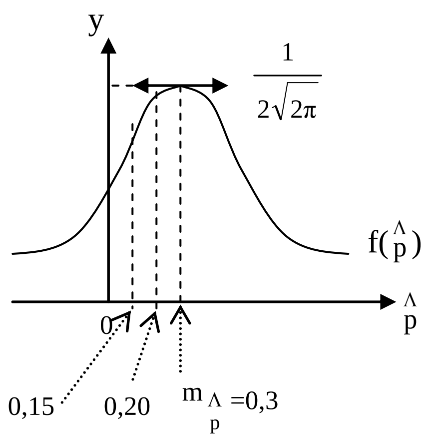
بما أن توزيع المعاينة لنسبة النجاحات $\hat{p}$ يقترب من التوزيع الطبيعي، فيمكن تعريف دالة كثافته الاحتمالية كالتالي:

$$f(\hat{p}) = \frac{1}{\sigma_{\hat{p}}\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{p} - m_{\hat{p}}}{\sigma_{\hat{p}}}\right)^2}$$

حيث $m_{\hat{p}}$ و $\sigma_{\hat{p}}$ يمثلان على التوالي المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة لنسبة النجاحات $\hat{p}$.

وعليه، فإن الاحتمال المطلوب يُعرف كالتالي:

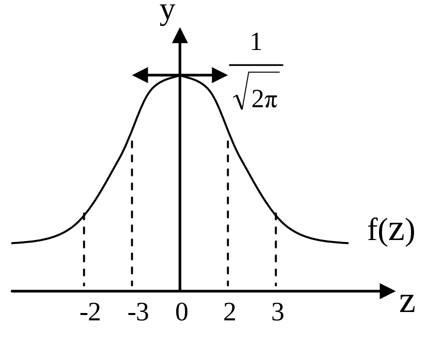
$$\Pr\ (0{,}20 > \hat{p} > 0{,}15) = \int_{0{,}15}^{0{,}20} \frac{1}{0{,}05\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{p} - 0{,}3}{0{,}05}\right)^2} d\hat{p}$$



نضع: $z = \frac{\hat{p} - 0{,}3}{0{,}05}$، فيصبح:

$$dz = \frac{1}{0{,}05} d\hat{p} \Rightarrow d\hat{p} = 0{,}05dz$$

$$\Pr\ (0{,}20 > \hat{p} > 0{,}15) = \int_{\frac{0{,}15 - 0{,}3}{0{,}05}}^{\frac{0{,}20 - 0{,}3}{0{,}05}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \int_{-3}^{-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$



من الشكل نلاحظ أن:

$$\Pr\ (0{,}20 > \hat{p} > 0{,}15) = \int_{2}^{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz = \int_{-\infty}^{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz - \int_{-\infty}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz$$

$$\Pr\ (0{,}20 > \hat{p} > 0{,}15) = \Phi(3) - \Phi(2)$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz$ نجد:

$$\mathbf{Pr\ (0{,}20 > \hat{p} > 0{,}15)} = 0{,}9986 - 0{,}9772 = \mathbf{0{,}0214}$$

وهو احتمال أن تكون نسبة النجاحات ما بين 0,15 و0,20.

4– توزيع المعاينة للفرق بين نسبتين $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ من مجتمع طبيعي

إذا كان لدينا مجتمعين يخضعان لتوزيع ذي الحدين؛ الأول بمتوسط $m_1 = n_1p_1$ وبتباين $\sigma_1^2 = n_1p_1q_1$ والمجتمع الثاني بمتوسط $m_2 = n_2p_2$ وبتباين $\sigma_2^2 = n_2p_2q_2$.

حيث تُمثل p احتمال النجاح وq احتمال الفشل.

وحيث n_1 تمثل حجم عينة عشوائية مختارة من المجتمع الأول وn_2 تمثل حجم عينة عشوائية مختارة من المجتمع الثاني، فإن توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي النجاحات $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ يتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي: $m_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = p_1 - p_2$، وبانحراف معياري: $\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}}$.

إذا كان توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي النجاحات $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ يقترب من التوزيع الطبيعي، فيمكن تعريف دالة كثافته الاحتمالية كالآتي:

$$f(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = \frac{1}{\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - m_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}}{\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}}\right]^2}$$

حيث $m_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$ و $\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$ يمثلان على التوالي المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للفرق بين نسبتي النجاحات $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$.

وحيث يمكن إيجاد الاحتمال $Pr(b < \hat{p}_1 - \hat{p}_2 < a)$ بوضع: $z = \dfrac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - m_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}$

للانتقال من التوزيع الطبيعي إلى التوزيع الطبيعي المعياري.

مثال: لتكن نسبة النجاح في امتحان الماجستير علوم التسيير في جامعة وهران 0,53 ونسبة النجاح في امتحان الماجستير لنفس التخصص 0,25 في جامعة سكيكدة.

سُحبت عينة عشوائية حجمها 94 طالباً من طلاب جامعة وهران وعينة ثانية جمها 50 طالباً من طلاب جامعة سكيكدة.

– أوجد احتمال أن تزيد نسبة النجاح في جامعة وهران عن نسبة النجاح في جامعة سكيكدة بأكثر من 0,12.

ملاحظة:

المتغير العشوائي الذي يُقترن بعدد النجاحات في امتحان الماجستير علوم التسيير في جامعة وهران وجامعة سكيكدة يخضع لقانون التوزيع الطبيعي.

الحلّ:

	جامعة وهران	جامعة سكيكدة
حجم العينة	$n_1 = 94$	$n_2 = 50$
نسبة النجاح في الامتحان	$p_1 = 0,53$	$p_2 = 0,25$

– إيجاد احتمال أن تزيد نسبة النجاح في جامعة وهران عن نسبة النجاح في جامعة سكيكدة بأكثر من 0,12:

توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي النجاحات $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ يتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي:

$$\mathbf{m_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}} = p_1 - p_2 = 0,53 - 0,25 = \mathbf{0,28}$$

وبانحراف معياري: $\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = \sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}}$

$$\boldsymbol{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}} = \sqrt{\frac{(0,53)(0,47)}{94}+\frac{(0,25)(0,75)}{50}} = \mathbf{0,08}$$

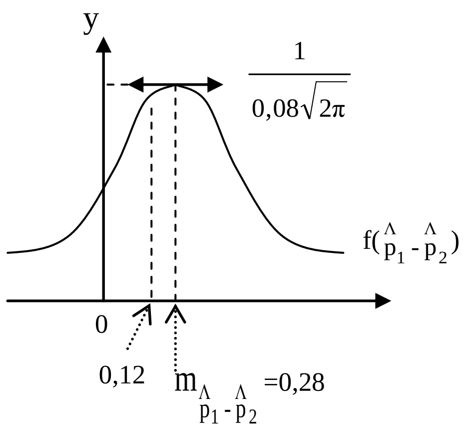
بما أن توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي النجاحات $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ يقترب من التوزيع الطبيعي، فيمكن تعريف دالة كثافته الاحتمالية كالآتي:

$$f(\hat{p}_1-\hat{p}_2) = \frac{1}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-m_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}\right]^2}$$

حيث $m_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$ و $\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$ يمثلان على التوالي المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للفرق بين نسبتي النجاحات $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$.

وعليه، فإن احتمال أن تزيد نسبة النجاح في جامعة وهران عن نسبة النجاح في جامعة سكيكدة بأكثر من 0,12 يمكن حسابه كالتالي:

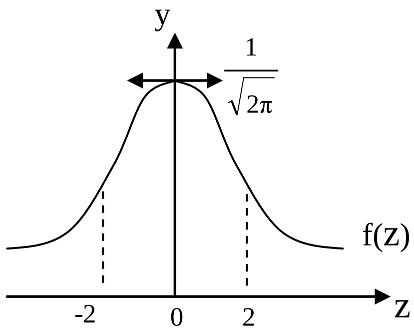
$$\Pr\left[(\hat{p}_1-\hat{p}_2) > 0,12\right] = \int_{0,12}^{+\infty} \frac{1}{0,08\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-0,28}{0,08}\right]^2} d(\hat{p}_1-\hat{p}_2)$$



نضع: $z = \dfrac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - 0,28}{0,08}$، فيصبح:

$$dz = \frac{1}{0,08}\, d(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \Rightarrow d(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = 0,08dz$$

$$\Pr\left[(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) > 0,12\right] = \int_{\frac{0,12 - 0,28}{0,08}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz = \int_{-2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz$$



من الشكل نلاحظ أن:

$$\Pr\left[(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) > 0,12\right] = \int_{-\infty}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \Phi(2)$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ نجد:

$$\mathbf{\Pr\left[(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) > 0,12\right] = 0,9772}$$

وهو احتمال أن تزيد نسبة النجاح في جامعة وهران عن نسبة النجاح في جامعة سكيكدة بأكثر من 0,12.

الاستدلال الإحصائي Inférence statistique

يُعتبر الاستدلال الإحصائي فرع في علم الإحصاء يهتم بطرق الاستدلال أو التعميم بشأن المجتمع وذلك بالاعتماد على معلومات يتم الحصول عليها من عينات مختارة من المجتمع.

يُعرف الاستدلال الإحصائي بأنه استخدام عينة عشوائية للوصول إلى تعميمات (معالم) مجهولة في المجتمع.

ينقسم الاستدلال الإحصائي إلى فرعين أساسيين هما التقدير Estimation واختبار الفرضيات Test d'hypothèses.

I- التقدير Estimation

تُعتبر المعلمة ثابت يصف المجتمع أو يصف توزيع المجتمع، كالوسط الحسابي m، الانحراف المعياري σ والنسبة p.

يتم تقدير معلمة المجتمع إما كتقدير بنقطة أو كتقدير بفترة ثقة.

1– التقدير النقطي Estimation en points:

يُمكن إيجاد الوسط الحسابي $\bar{x}$ للعينة العشوائية من المجتمع الإحصائي ويُستخدم كتقدير للوسط الحسابي m للمجتمع.

ويُمكن استخدام الانحراف المعياري s للعينة العشوائية من المجتمع الإحصائي كتقدير للانحراف المعياري σ للمجتمع.

كما يُمكن استخدام النسبة $\bar{p}$ للعينة العشوائية من المجتمع الإحصائي كتقدير للنسبة p للمجتمع.

أ– التقدير النقطي للوسط الحسابي m للمجتمع:

إذا سُحبت عينة عشوائية تحتوي على n مشاهدة من المشاهدات: $x_1, x_2, \dots x_i, \dots x_n$ من مجتمع ما، فإن صيغة التقدير النقطي للوسط الحسابي m للمجتمع تُعرف كما يلي:

$$m = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

مثال: أحسب التقدير النقطي للوسط الحسابي m لمجتمع إحصائي، إذا علمت أن المشاهدات التالية تُمثل عينة عشوائية مسحوبة منه:

1, -1, 0, 2, 3

الحلّ: صيغة التقدير النقطي للوسط الحسابي m للمجتمع تُعرف كما يلي:

$$m = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$m = \bar{x} = \frac{5}{5} = 1$$

يُمكن القول أن وسط المجتمع يُقدر بالقيمة 1 وتتحدد دقة ذلك التقدير حسب طبيعة وحجم العينة المسحوبة من المجتمع.

ب- التقدير النقطي للنسبة p للمجتمع:

إذا سُحبت عينة عشوائية تحتوي على n مشاهدة من المشاهدات وكانت n_A تكرار الحدث A في تلك العينة، فإن صيغة التقدير النقطي للنسبة p تُعرف كما يلي:

$$p = \hat{p} = \frac{n_A}{n}$$

مثال: أحسب التقدير النقطي لنسبة الأعداد السالبة p لمجتمع إحصائي، إذا علمت أن المشاهدات التالية تُمثل عينة عشوائية مسحوبة منه:

1, -1, 0, 2, 3

الحلّ: تكرار الأعداد السالبة في العينة: $n_A = 1$

صيغة التقدير النقطي للنسبة p تُعرف كما يلي:

$$p = \hat{p} = \frac{n_A}{n}$$

$$p = \hat{p} = \frac{1}{5} = 0,2$$

يُمكن القول أن 20% تقريباً من المجتمع عبارة عن قيم سالبة.

2– التقدير بفترة ثقة Estimation par intervalle de confiance:

تُعبر فترة الثقة عن مدى متصل من القيم الحقيقية والذي يحتوي على المعلمة المجهولة باحتمال محدد.

هذه الفترة يُقابلها معامل مناسب يُسمى بدرجة الثقة Degré de confiance. فنقول مثلاً بالنسبة لمجتمع، بأن الوسط الحسابي m مجهول ومحصور بين 0,4 و0,5 بدرجة ثقة 95% ونكتب:

$$0{,}4 \le m \le 0{,}5$$

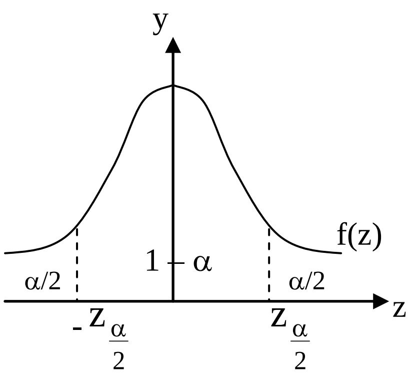
$$1 - \alpha = 0{,}95$$

فترة الثقة حول الوسط الحسابي m لمجتمع طبيعي:

هناك ثلاث (03) حالات:

الحالة الأولى– فترة الثقة حول الوسط الحسابي m لمجتمع طبيعي إذا كان الانحراف المعياري σ للمجتمع معلوم:

حيث أن الانحراف المعياري σ للمجتمع معلوم، فسوف نعتمد على جدول التوزيع الطبيعي المعياري لحساب القيمة المعيارية: $z_{\frac{\alpha}{2}}$.



لدينا: $z_{\frac{\alpha}{2}}$ $\quad \Pr(-z_{\frac{\alpha}{2}} \le z \le z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$

$$\int_{-z_{\frac{\alpha}{2}}}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1 - \alpha \Leftrightarrow \int_{0}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{1-\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \Phi(z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{1-\alpha}{2} + 0{,}5$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ نجد القيمة المعيارية: $z_{\frac{\alpha}{2}}$ التي نُعوضها في فترة الثقة حول الوسط الحسابي m كالتالي:

$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\delta}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

أي أننا واثقين بنسبة $1 - \alpha$ من أن الوسط الحسابي m للمجتمع المجهول موجود في هذه الفترة.

لو تم سحب 100 عينة عشوائية من هذا المجتمع حجم كلّ منها: n، فإنه من المحتمل أن يكون هناك $1 - \alpha$ من فترات الثقة تشتمل على متوسط المجتمع m وعليه تكون:

$$Pr(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

مثال: إذا علمت أن الوقت المستنفذ في العمل لإحدى المؤسسات يتبع التوزيع الطبيعي بانحراف معياري 3,5.

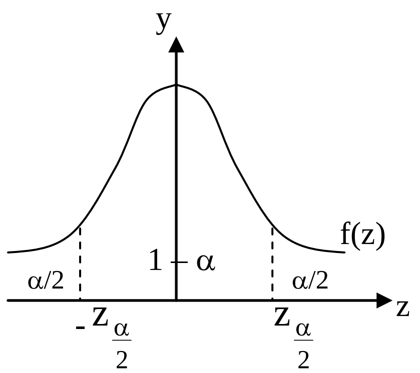
سُحبت عينة من 60 عنصر من ذلك المجتمع وحُسب وسطها الحسابي، فكان مساوياً للقيمة 25.

أوجد فترة الثقة 95% حول الوسط الحسابي m للمجتمع.

الحلّ: $\sigma = 3,5$ $\quad \bar{x} = 25$ $\quad n = 60$ $\quad 1 - \alpha = 0,95$

حيث أن الانحراف المعياري σ للمجتمع معلوم، فسوف نعتمد على جدول التوزيع الطبيعي المعياري لحساب القيمة المعيارية: $z_{\frac{\alpha}{2}}$.

لدينا: $Pr(-z_{\frac{\alpha}{2}} \le z \le z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$



$$\int_{-z_{\frac{\alpha}{2}}}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1 - \alpha \Leftrightarrow \int_{0}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{1 - \alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \Phi(z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{1 - \alpha}{2} + 0,5$$

$$\Phi(z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{0,95}{2} + 0,5 = 0,9750$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ نجد القيمة

المعيارية: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$ التي نُعوضها في فترة الثقة حول الوسط الحسابي m كالتالي:

$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$25 - 1,96 \frac{3,5}{\sqrt{60}} \leq m \leq 25 + 1,96 \frac{3,5}{\sqrt{60}}$$

$$24,11 \leq m \leq 25,89$$

أي أننا واثقين بنسبة 95% من أن الوسط الحسابي m للمجتمع المجهول موجود في هذه الفترة.

لو تم سحب 100 عينة عشوائية من هذا المجتمع حجم كلّ منها: n = 60، فإنه من المحتمل

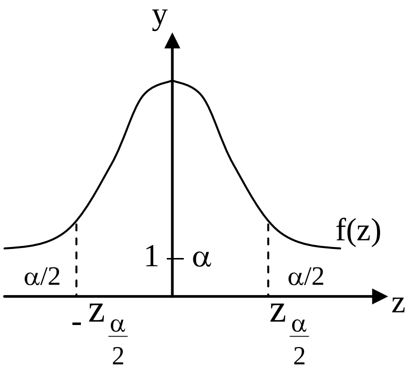
أن يكون هناك 95% من فترات الثقة تشتمل على متوسط المجتمع m وعليه تكون:

$$Pr(24,11 \leq m \leq 25,89) = 0,95$$

<u>الحالة الثانية– فترة الثقة حول الوسط الحسابي m لمجتمع طبيعي إذا كان الانحراف المعياري σ للمجتمع غير معلوم $n > 30$:</u>

حيث أن الانحراف المعياري σ للمجتمع غير معلوم وحجم العينة كبير $n > 30$، فسوف نعتمد

على جدول التوزيع الطبيعي المعياري لحساب القيمة المعيارية: $z_{\frac{\alpha}{2}}$.



لدينا: $Pr(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$

$$\int_{-z_{\frac{\alpha}{2}}}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1-\alpha \Leftrightarrow \int_{0}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{1-\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \Phi(z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{1-\alpha}{2} + 0,5$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ نجد القيمة المعيارية: $z_{\frac{\alpha}{2}}$ التي نُعوضها في فترة الثقة حول الوسط الحسابي m مع استبدال الانحراف المعياري σ للمجتمع غير المعلوم بالانحراف المعياري s للعينة كالتالي:

$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

أي أننا واثقين بنسبة $1-\alpha$ من أن الوسط الحسابي m للمجتمع المجهول موجود في هذه الفترة.

لو تم سحب 100 عينة عشوائية من هذا المجتمع حجم كلّ منها: n، فإنه من المحتمل أن يكون هناك $1-\alpha$ من فترات الثقة تشتمل على متوسط المجتمع m وعليه تكون:

$$Pr(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}) = 1-\alpha$$

مثال: إذا سُحبت عينة عشوائية حجمها 32 عنصر من مجتمع طبيعي، فأعطت النتائج التالية:

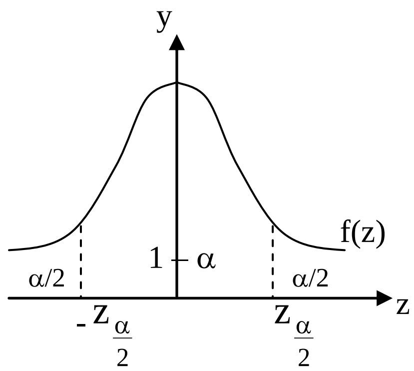
الوسط الحسابي للعينة العشوائية: 5,656.

الانحراف المعياري للعينة العشوائية: 3,229.

أوجد فترة الثقة 90% حول الوسط الحسابي m للمجتمع.

الحلّ: $s = 3,229$ $\quad \bar{x} = 5,656$ $\quad n = 32$ $\quad 1-\alpha = 0,90$

حيث أن الانحراف المعياري σ للمجتمع غير معلوم وحجم العينة كبير $n > 30$، فسوف نعتمد على جدول التوزيع الطبيعي المعياري لحساب القيمة المعيارية: $z_{\frac{\alpha}{2}}$.



لدينا: $z_{\frac{\alpha}{2}}$ $\quad \Pr(-z_{\frac{\alpha}{2}} \le z \le z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$

$$\int_{-z_{\frac{\alpha}{2}}}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1-\alpha \Leftrightarrow \int_{0}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{1-\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \Phi(z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{1-\alpha}{2} + 0,5$$

$$\Phi(z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{0,90}{2} + 0,5 = 0,9500$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ نجد القيمة المعيارية: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645$ التي نُعوضها في فترة الثقة حول الوسط الحسابي m مع استبدال الانحراف المعياري δ للمجتمع غير المعلوم بالانحراف المعياري s للعينة كالتالي:

$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$5,656 - 1,645 \frac{3,229}{\sqrt{32}} \le m \le 5,656 + 1,645 \frac{3,229}{\sqrt{32}}$$

$$4,717 \le m \le 6,595$$

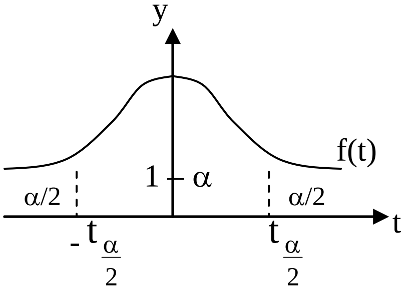
أي أننا واثقين بنسبة 90% من أن الوسط الحسابي m للمجتمع المجهول موجود في هذه الفترة.

لو تم سحب 100 عينة عشوائية من هذا المجتمع حجم كلّ منها: $n = 32$، فإنه من المحتمل أن يكون هناك 90% من فترات الثقة تشتمل على متوسط المجتمع m وعليه تكون:

$$\Pr(4,717 \le m \le 6,595) = 0,90$$

<u>الحالة الثالثة– فترة الثقة حول الوسط الحسابي m لمجتمع طبيعي إذاكان الانحراف المعياري σ للمجتمع غير معلوم $n \le 30$:</u>

حيث أن الانحراف المعياري σ للمجتمع غير معلوم وحجم العينة صغير $n \le 30$، فسوف نعتمد على جدول توزيع ستودانت لحساب القيمة المعيارية: $t_{\frac{\alpha}{2}}$، بدرجة حرية: $\nu = n - 1$.



لدينا: $t_{\frac{\alpha}{2}}$ $\Pr(-t_{\frac{\alpha}{2}} \le t \le t_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$

وبالبحث في جدول توزيع ستودانت عند مستوى المعنوية α ودرجة الحرية ν نجد القيمة المعيارية: $t_{\frac{\alpha}{2}}$ التي نُعوضها في فترة الثقة حول الوسط الحسابي m مع استبدال الانحراف المعياري σ للمجتمع غير المعلوم بالانحراف المعياري s للعينة كالتالي:

$$\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

أي أننا واثقين بنسبة $1 - \alpha$ من أن الوسط الحسابي m للمجتمع المجهول موجود في هذه الفترة.

لو تم سحب 100 عينة عشوائية من هذا المجتمع حجم كلّ منها: n، فإنه من المحتمل أن يكون هناك $1 - \alpha$ من فترات الثقة تشتمل على متوسط المجتمع m وعليه تكون:

$$\Pr(\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

<u>مثال</u>: سُحبت عينة عشوائية حجمها 13 عنصر من مجتمع طبيعي، فأعطت النتائج التالية:

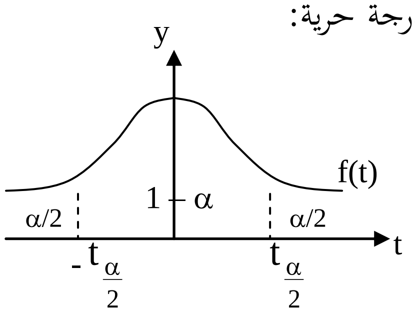
الوسط الحسابي للعينة العشوائية: 45,62.

الانحراف المعياري للعينة العشوائية: 5,694.

أوجد فترة الثقة 95% حول الوسط الحسابي m للمجتمع.

الحلّ: $s = 5,694$ $\quad \bar{x} = 45,62$ $\quad n = 13$ $\quad 1 - \alpha = 0,95$

حيث أن الانحراف المعياري σ للمجتمع غير معلوم وحجم العينة صغير $n \leq 30$، فسوف نعتمد على جدول توزيع ستودانت لحساب القيمة المعيارية: $t_{\frac{\alpha}{2}}$، بدرجة حرية:



$$\nu = n - 1 = 13 - 1 = 12$$

لدينا: $t_{\frac{\alpha}{2}}$ $\quad Pr(-t_{\frac{\alpha}{2}} \leq t \leq t_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$

وبالبحث في جدول توزيع ستودانت عند مستوى المعنوية $\alpha = 0,05$ ودرجة الحرية $\nu = 12$ نجد القيمة المعيارية: $t_{\frac{\alpha}{2}} = 2,179$ التي نُعوضها في فترة الثقة حول الوسط الحسابي m مع استبدال الانحراف المعياري σ للمجتمع غير المعلوم بالانحراف المعياري s للعينة كالتالي:

$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$45,62 - 2,179 \frac{5,694}{\sqrt{13}} \leq m \leq 45,62 + 2,179 \frac{5,694}{\sqrt{13}}$$

$$42,18 \leq m \leq 49,06$$

أي أننا واثقين بنسبة 95% من أن الوسط الحسابي m للمجتمع المجهول موجود في هذه الفترة.

لو تم سحب 100 عينة عشوائية من هذا المجتمع حجم كلّ منها: $n = 13$، فإنه من المحتمل أن يكون هناك 95% من فترات الثقة تشتمل على متوسط المجتمع m وعليه تكون:

$$Pr(42,18 \leq m \leq 49,06) = 0,95$$

II- اختبار الفرضيات Test d’hypothèses

يُعد اختبار الفرضيات من الفروع الأساسية في نظرية القرار وإحدى طرق الاستدلال الإحصائي التي تُبنى على اختبار فرض إدعاء حول معلمة من معالم المجتمع، معتمدةً في ذلك على بيانات مسحوبة من ذلك المجتمع.

تعريف الفرضية الإحصائية:

تُعد الفرضية الإحصائية بمثابة تعبير أو تخمين قد يكون صحيحاً أو خاطئاً حول معلمة من معالم المجتمع، أو حول التوزيع الاحتمالي لمجتمع، أو حول معلمتين أو أكثر إذا كانت الدراسة خاصة بمقارنة مجتمعين أو أكثر.

أنواع الفرضيات الإحصائية:

تُصنف الفرضيات الإحصائية إلى نوعين:

1– فرضية العدم (الفرضية الصفرية) H_0:

تُمثل التعبير أو التخمين الذي يُعبر عن الوضع الراهن الذي يأمل الباحث أن يرفضه، وتُعطى من خلال المعلمة قيمة يعتقد الباحث أنها ليست القيمة الحقيقية للمعلمة.

2– الفرضية البديلة H_1 أو H_a:

تُمثل الفرضية التي تُقبل كبديل لفرضية العدم.

صياغة الفرضيات:

إذا كانت μ معلمة مجهولة وكانت μ_0 تمثل قيمتها المفترضة، فيمكن صياغة الفرضيات على إحدى الحالات الثلاث التالية:

$H_0 : \mu = \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$
$H_1 : \mu < \mu_0$	$H_1 : \mu > \mu_0$	$H_1 : \mu \neq \mu_0$
حالة اختبار الفرضيات ذو طرف واحد لليسار	حالة اختبار الفرضيات ذو طرف واحد لليمين	حالة اختبار الفرضيات ذو طرفين

إحصاءة الاختبار:

هي قيمة المتغير العشوائي المعلوم عندما يكون فرض العدم H_0 صحيحاً، والتي تعتمد في حسابها على بيانات العينة العشوائية المسحوبة من المجتمع. ومن خلال تلك القيمة يتم اتخاذ القرار برفض أو بقبول فرضية العدم H_0.

وتنقسم مجموعة قيم إحصاءة الاختبار الممكنة إلى مجموعتين متداخلتين هما:

1– منطقة القبول لفرضية العدم H_0:

تُمثل المنطقة التي تحتوي على جميع قيم إحصاءة الاختبار التي تُؤدي إلى قبول فرضية العدم H_0.

2– منطقة الرفض لفرضية العدم H_0:

تُمثل المنطقة التي تحتوي على جميع قيم إحصاءة الاختبار التي تُؤدي إلى رفض فرضية العدم H_0.

خطوات حلّ مسألة اختبار الفرضيات:

1– **صياغة الفرضيات** حول معالم المجتمع، بحيث تشمل فرضية العدم والفرضية البديلة؛

2– **تحديد مناطق الرفض والقبول** لفرضية العدم أو للفرضية البديلة بالاعتماد على نوع الفرضيات وكذلك اتجاه الفرضية البديلة ومستوى المعنوية والتوزيع الاحتمالي المناسب؛

3– **حساب إحصاءة أو دالة الاختبار** بالاعتماد على عينة مسحوبة من مجتمع الدراسة؛

4– **اتخاذ القرار** بقبول أو رفض الفرضيات بناءاً على موقع قيمة إحصاءة الاختبار بالنسبة لمناطق الرفض والقبول.

حلّ مسألة اختبار الفرضيات حول الوسط الحسابي m لمجتمع طبيعي:

هناك ثلاث (03) حالات:

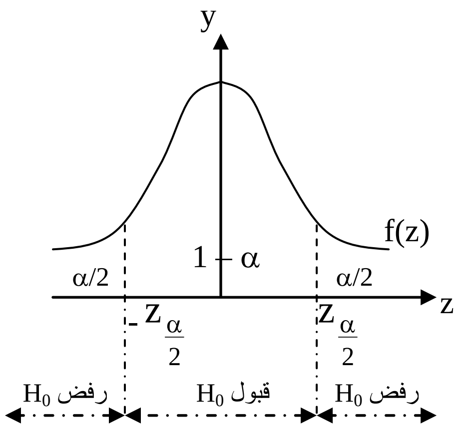
<u>الحالة الأولى– اختبار الفرضيات حول الوسط الحسابي m لمجتمع طبيعي إذا كان الانحراف المعياري σ</u>

1– صياغة الفرضيات: $H_0 : m = m_0$

$H_1 = m \neq m_0$

2– تحديد مناطق الرفض والقبول:

حيث أن الانحراف المعياري σ للمجتمع معلوم، فسوف نعتمد على جدول التوزيع الطبيعي



المعياري لحساب القيمة المعيارية: $z_{\frac{\alpha}{2}}$.

لدينا: $z_{\frac{\alpha}{2}}$ $\Pr(-z_{\frac{\alpha}{2}} \le z \le z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$

$$\int_{-z_{\frac{\alpha}{2}}}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1 - \alpha \Leftrightarrow \int_{0}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{1-\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \Phi(z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{1-\alpha}{2} + 0,5$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ نجد القيمة

المعيارية: $z_{\frac{\alpha}{2}}$.

3– حساب إحصاءة الاختبار: $z = \dfrac{\bar{x} - m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

4– اتخاذ القرار:

بحساب قيمة إحصاءة الاختبار نتخذ القرار برفض الفرضية العدمية H_0 أو قبولها بناءً على موقعها في منطقتي الرفض والقبول لهذه الفرضية.

مثال: عينة عشوائية حجمها 49 شخصاً أُختيرت من أفراد دولة ما.

إذا كان الوسط الحسابي لدخول الأفراد الأسبوعية في هذه العينة هو 7500 دينار؛

فكيف يمكن اختبار فرض العدم بأن متوسط الدخل الأسبوعي لمواطني هذه الدولة يساوي 7200 دينار مقابل الفرضية البديلة أنه لا يساوي 7200 دينار بمستوى معنوية 5%، إذا علمت أن الانحراف المعياري لدخول الأفراد في هذه الدولة يساوي 1400 دينار؟

الحلّ: $\sigma = 1400$ $\quad m_0 = 7200$ $\quad \bar{x} = 7500$ $\quad \alpha = 0,05$ $\quad n = 49$

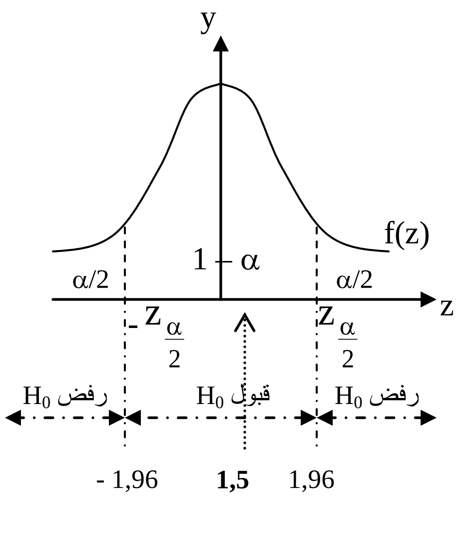
1– صياغة الفرضيات: $H_0 : m = 7200$

$H_1 : m \neq 7200$

2– تحديد مناطق الرفض والقبول:

حيث أن الانحراف المعياري σ للمجتمع معلوم، فسوف نعتمد على جدول التوزيع الطبيعي المعياري لحساب القيمة المعيارية: $z_{\frac{\alpha}{2}}$.

لدينا: $z_{\frac{\alpha}{2}}$ $\quad \Pr(-z_{\frac{\alpha}{2}} \le z \le z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$



$$\int_{-z_{\frac{\alpha}{2}}}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1 - \alpha \Leftrightarrow \int_{0}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{1-\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \Phi(z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{1-\alpha}{2} + 0,5$$

$$\Phi(z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{0,95}{2} + 0,5 = 0,9750$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ نجد القيمة

المعيارية: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$.

3– حساب إحصاءة الاختبار: $z = \frac{\bar{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{7500 - 7200}{\frac{1400}{\sqrt{49}}} = 1,5$

4– اتخاذ القرار:

نلاحظ أن قيمة إحصاءة الاختبار 1,5 تقع في منطقة القبول لـ: H_0 وعليه نقبل فرضية العدم بأن متوسط الدخل الأسبوعي لمواطني هذه الدولة يساوي الدولة يساوي 7200 دينار بمستوى معنوية 5%.

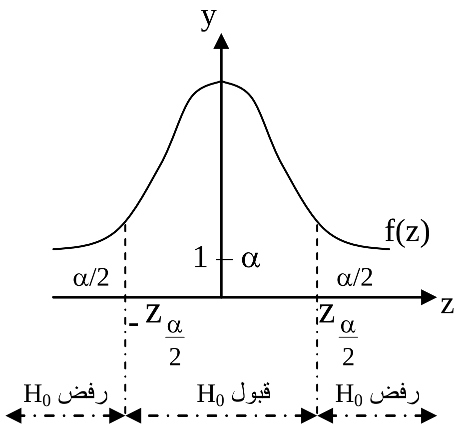
<u>الحالة الثانية– اختبار الفرضيات حول الوسط الحسابي m لمجتمع طبيعي إذا كان الانحراف المعياري σ للمجتمع غير معلوم $n > 30$:</u>

1– صياغة الفرضيات: $H_0 : m = m_0$

$H_1 = m \neq m_0$

2– تحديد مناطق الرفض والقبول:

حيث أن الانحراف المعياري σ للمجتمع غير معلوم وحجم العينة كبير $n > 30$، فسوف نعتمد على جدول التوزيع الطبيعي المعياري لحساب القيمة المعيارية: $z_{\frac{\alpha}{2}}$.



لدينا: $z_{\frac{\alpha}{2}}$ $\Pr(-z_{\frac{\alpha}{2}} \le z \le z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$

$$\int_{-z_{\frac{\alpha}{2}}}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1-\alpha \Leftrightarrow \int_{0}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{1-\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \Phi(z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{1-\alpha}{2} + 0,5$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ نجد القيمة

المعيارية: $z_{\frac{\alpha}{2}}$.

3– حساب إحصاءة الاختبار: $z = \dfrac{\bar{x} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$

4– اتخاذ القرار:

بحساب قيمة إحصاءة الاختبار نتخذ القرار برفض الفرضية العدمية H_0 أو قبولها بناءاً على موقعها في منطقتي الرفض والقبول لهذه الفرضية.

مثال: يتطلب القبول لوظيفة معينة الحصول على مجموع نقاط 500 في امتحانات المسابقة.

فإذا أُختير 36 شخص ممن تقدموا لتلك الوظيفة، كان الوسط الحسابي لمجموع نقاطهم في امتحانات المسابقة 546 بانحراف معياري 120.

اختبر ما إذا كان مجموع نقاط من تقدموا للوظيفة في امتحانات المسابقة أكبر من المتوسط المطلوب للقبول وذلك بمستوى معنوية 5%.

الحلّ: $s = 120$ $\quad m_0 = 500$ $\quad \bar{x}$ $\quad \alpha = 0,05$ $\quad n = 36$ $\quad = 546$

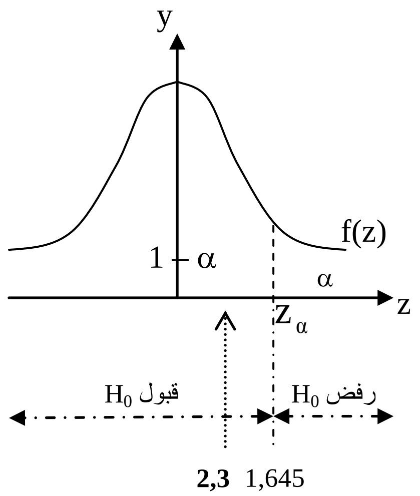
1– صياغة الفرضيات: $H_0 : m = 500$

$H_1 : m > 500$

2– تحديد مناطق الرفض والقبول:

حيث أن الانحراف المعياري σ للمجتمع غير معلوم وحجم العينة كبير $n > 30$، فسوف نعتمد

على جدول التوزيع الطبيعي المعياري لحساب القيمة المعيارية: Z_α.



لدينا: $\Pr(z \le z_\alpha) = 1 - \alpha$

$$\int_{-\infty}^{z\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1 - \alpha$$

$$\Phi(z_\alpha) = 0,9500$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ نجد القيمة

المعيارية: $Z_\alpha = 1,645$.

3– حساب إحصاءة الاختبار: $z = \dfrac{\bar{x} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \dfrac{546 - 500}{\frac{120}{\sqrt{36}}} = 2,3$

4– اتخاذ القرار:

نلاحظ أن قيمة إحصاءة الاختبار 2,3 تقع في منطقة الرفض لـ: H_0 وعليه نرفض فرضية العدم بأن متوسط مجموع نقاط من تقدموا للوظيفة في امتحانات المسابقة يساوي المتوسط المطلوب للقبول بمستوى معنوية 5%.

الحالة الثالثة– اختبار الفرضيات حول الوسط الحسابي m لمجتمع طبيعي إذا كان الانحراف المعياري

σ للمجتمع غير معلوم $n \le 30$:

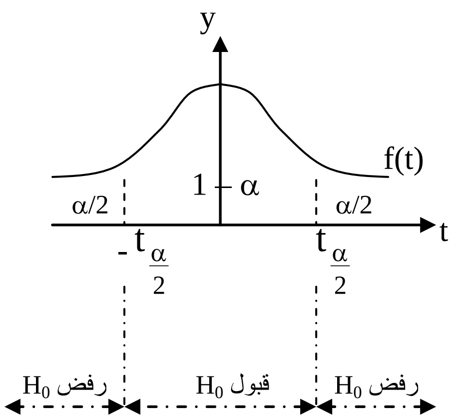
1– صياغة الفرضيات: $H_0 : m = m_0$

$H_1 : m \neq m_0$

2– تحديد مناطق الرفض والقبول:

حيث أن الانحراف المعياري δ للمجتمع غير معلوم وحجم العينة صغير $n \le 30$، فسوف نعتمد على جدول توزيع ستودانت لحساب القيمة المعيارية: $t_{\frac{\alpha}{2}}$، بدرجة حرية: $v = n - 1$.

لدينا: $t_{\frac{\alpha}{2}}$ $\quad Pr(-t_{\frac{\alpha}{2}} \le t \le t_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$



وبالبحث في جدول توزيع ستودانت عند مستوى المعنوية α ودرجة الحرية v نجد القيمة المعيارية: $t_{\frac{\alpha}{2}}$.

3– حساب إحصاءة الاختبار: $t = \dfrac{\bar{x} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$

4– اتخاذ القرار:

بحساب قيمة إحصاءة الاختبار نتخذ القرار برفض الفرضية العدمية H_0 أو قبولها بناءاً على موقعها في منطقتي الرفض والقبول لهذه الفرضية.

مثال: يتطلب القبول لوظيفة معينة الحصول على مجموع نقاط 500 في امتحانات المسابقة.

فإذا أُختير 16 شخص ممن تقدموا لتلك الوظيفة، كان الوسط الحسابي لمجموع نقاطهم في امتحانات المسابقة 546 بانحراف معياري 120.

اختبر ما إذا كان مجموع نقاط من تقدموا للوظيفة في امتحانات المسابقة أكبر من المتوسط المطلوب للقبول وذلك بمستوى معنوية 5%.

الحلّ: $s = 120$ $\quad m_0 = 500$ $\quad \bar{x} = 546$ $\quad n = 16$ $\quad \alpha = 0,05$

1– صياغة الفرضيات: $H_0 : m = 500$

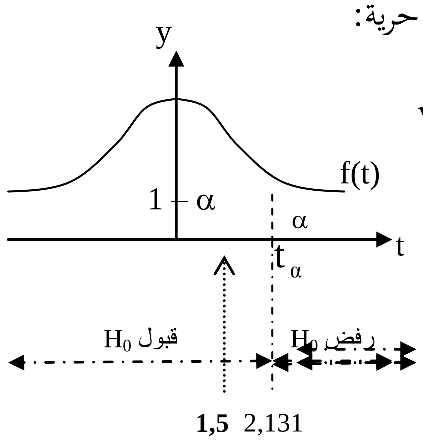
$H_1 : m > 500$

2– تحديد مناطق الرفض والقبول:

حيث أن الانحراف المعياري σ للمجتمع غير معلوم وحجم العينة صغير $n \leq 30$، فسوف نعتمد على جدول توزيع ستودانت لحساب القيمة المعيارية: t_α، بدرجة حرية:

$$\nu = n - 1 = 16 - 1 = 15$$

لدينا: $\Pr(t \leq t_\alpha) = 1 - \alpha$



وبالبحث في جدول توزيع ستودانت عند مستوى المعنوية $\alpha = 0,05$ ودرجة الحرية $\nu = 15$ نجد القيمة المعيارية $t_\alpha = 2,131$.

3– حساب إحصاءة الاختبار: $t = \dfrac{\bar{x} - m}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}} = \dfrac{546 - 500}{\dfrac{120}{\sqrt{16}}} = 1,5$

4– اتخاذ القرار:

نلاحظ أن قيمة إحصاءة الاختبار 1,5 تقع في منطقة القبول لـ: H_0 وعليه نقبل فرضية العدم بأن متوسط مجموع نقاط من تقدموا للوظيفة في امتحانات المسابقة يساوي المتوسط المطلوب للقبول بمستوى معنوية 5%.

سلسلة تمارين المحاضرة خاصة بفترة الثقة حول الوسط الحسابي m لمجتمع طبيعي واختبار الفرضيات حول الوسط الحسابي m:

التمرين الأول:

تسبب المقاعد الخالية لإحدى شركات الطيران في خسارة لمصدر الدخل، بفرض أن إحدى شركات الطيران الكبرى أرادت تقدير عدد المقاعد الخالية لكل رحلة خلال العام الماضي. ولهذا الغرض، تم اختيار عشوائي لعدد 225 رحلة طيران وتسجيل عدد المقاعد الخالية في كلّ رحلة وكان الوسط الحسابي والانحراف المعياري لعدد المقاعد الخالية في هذه العينة هما على التوالي 11,6 مقعد و4,1 مقعد. قدر متوسط عدد المقاعد الخالية للرحلة خلال العام الماضي في شركة الطيران هذه باستخدام فترة ثقة 90%.

أعطي من جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

$$\int_{-\infty}^{1,645} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,9500 \qquad \int_{-\infty}^{1,640} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,9495$$

التمرين الثاني:

إذا كان أحد مصانع المواد الغذائية ينتج نوعاً من الألبان حيث يصل متوسط وزن العبوة 240 غرام، وذلك بانحراف معياري 18 غرام حيث كانت أوزان العبوات تتبع التوزيع الطبيعي.

تم أخذ عينة من 9 عبوات لإجراء اختبار الرقابة على الجودة، فوُجد أن متوسط وزن العبوة 235 غرام.

هل ترى أن هناك عيباً بالإنتاج مما أدى إلى انخفاض متوسط وزن العبوة؟ وذلك عند مستوى معنوية 10%.

التمرين الثالث:

من المعلوم أن أحد أدوية إزالة الألم المستخدمة يمكنها إزالة الألم للمريض في فترة زمنية متوسطها 3,7 دقيقة. ولمقارنة هذا الدواء بدواء جديد لإزالة الألم، أُختيرت عينة عشوائية من 60 مريضاً وتم إعطاء الدواء لهم فكان المتوسط الحسابي لطول فترة إزالة الألم في هذه العينة 2,2 دقيقة بانحراف معياري 1,2 دقيقة.

هل تدل هذه النتائج على أن الدواء الجديد أفضل من الدواء القديم من حيث الفترة اللازمة لإزالة الألم؟ وذلك عند مستوى معنوية 5,94%.

أعطي من جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

$$\int_{-\infty}^{1,56} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,9406 \qquad \int_{-\infty}^{1,55} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,9394$$

التمرين الرابع:

إذا كان متوسط ربح سهم إحدى الشركات 15 دينار في العام الماضي. تم أخذ عينة من 7 مساهمين عن توقعاتهم عن متوسط ربح السهم العام الحالي فوُجد أنه 17 دينار بانحراف معياري 2 دينار.

هل توافق المساهمين في تقديرهم لارتفاع ربح السهم هذا العام؟ وذلك عند مستوى معنوية 5%.

أعطي من جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

$$\int_{-\infty}^{1,645} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,9500 \qquad \int_{-\infty}^{1,640} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,9495$$

أعطي من جدول توزيع ستودانت:

عندما يكون مستوى المعنوية: $\alpha = 0,05$ ودرجة الحرية: $\nu = 6$، تكون: $t = 1,943$

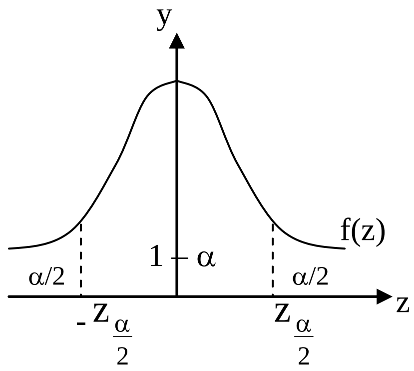
حلّول سلسلة تمارين المحاضرة الخاصة بفترة الثقة حول الوسط الحسابي m لمجتمع طبيعي واختبار الفرضيات حول الوسط الحسابي m:

<u>**التمرين الأول:**</u>

– تقدير متوسط عدد المقاعد الخالية للرحلة خلال العام الماضي في شركة الطيران هذه باستخدام فترة ثقة 90%:

$$s = 4{,}1 \qquad \bar{x} = 11{,}6 \qquad n = 225 \qquad 1 - \alpha = 0{,}90$$

حيث أن الانحراف المعياري σ للمجتمع غير معلوم وحجم العينة كبير n>30، فسوف نعتمد



على جدول التوزيع الطبيعي المعياري لحساب القيمة المعيارية: $z_{\frac{\alpha}{2}}$.

لدينا: $z_{\frac{\alpha}{2}}$ $\qquad \Pr(-z_{\frac{\alpha}{2}} \le z \le z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$

$$\int_{-z_{\frac{\alpha}{2}}}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1 - \alpha \Leftrightarrow \int_{0}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{1-\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \Phi(z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{1-\alpha}{2} + 0{,}5$$

$$\Phi(z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{0{,}90}{2} + 0{,}5 = 0{,}9500$$

وحسب معطيات جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$

نجد القيمة المعيارية: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645$ التي نُعوضها في فترة الثقة حول الوسط الحسابي m مع استبدال الانحراف المعياري σ للمجتمع غير المعلوم بالانحراف المعياري s للعينة كالتالي:

$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$11,6 - 1,645\frac{4,1}{\sqrt{225}} \leq m \leq 11,6 + 1,645\frac{4,1}{\sqrt{225}}$$

$$11,15 \leq m \leq 12,05$$

أي أننا واثقين بنسبة 90% من أن الوسط الحسابي m للمجتمع المجهول (متوسط عدد المقاعد الخالية خلال العام الماضي) موجود في هذه الفترة.

لو تم سحب 100 عينة عشوائية من هذا المجتمع حجم كلّ منها: n = 225، فإنه من المحتمل أن يكون هناك 90% من فترات الثقة تشتمل على متوسط المجتمع m وعليه تكون:

$$Pr(11,15 \leq m \leq 12,05) = 0,90$$

التمرين الثاني:

اختبار فرضية أن هناك عيباً بالإنتاج مما أدى إلى انخفاض متوسط وزن العبوة وذلك عند مستوى معنوية 10%:

$$\sigma = 18 \quad m_0 = 240 \quad \bar{x} = 235 \quad n = 9 \quad \alpha = 0,1$$

1– صياغة الفرضيات: $H_0 : m = 240$

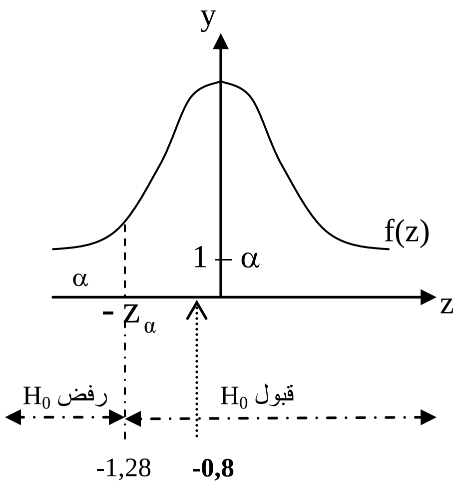
$$H_1 : m < 240$$

2– تحديد مناطق الرفض والقبول:

حيث أن الانحراف المعياري σ للمجتمع معلوم، فسوف نعتمد على جدول التوزيع الطبيعي المعياري لحساب القيمة المعيارية: Z_α.

لدينا: $Pr(z \geq -z_\alpha) = 1 - \alpha$

$$\int_{-z\alpha}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1 - \alpha$$



$$\int_{-\infty}^{z\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1 - \alpha$$

$$\Phi(z_\alpha) = 0{,}9000$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ نجد القيمة المعيارية: $z_\alpha = 1{,}28$.

3– حساب إحصاءة الاختبار: $z = \frac{\bar{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{235 - 240}{\frac{18}{\sqrt{9}}} = -0{,}83$

4– اتخاذ القرار:

نلاحظ أن قيمة إحصاءة الاختبار 0,83 – تقع في منطقة القبول لـ: H_0 وعليه نقبل فرضية العدم بأن متوسط وزن العبوة يساوي 240 غرام بمستوى معنوية 10%.

التمرين الثالث:

اختبار فرضية أن الدواء الجديد أفضل من الدواء القديم من حيث الفترة اللازمة لإزالة الألم وذلك عند مستوى معنوية 5,94%:

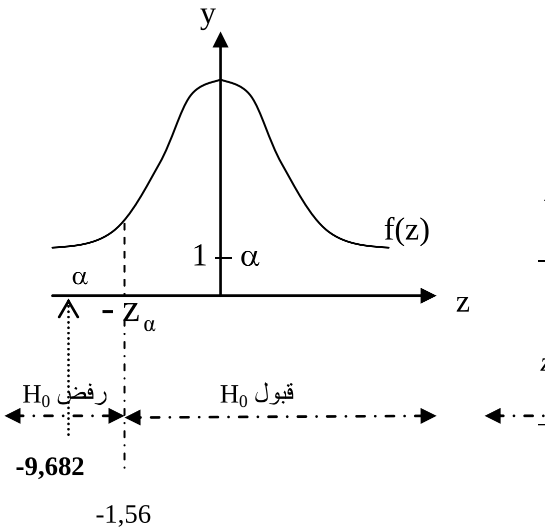
$\bar{x} = 2{,}2 \quad n = 60 \quad \alpha = 0{,}0594 \quad m_0 = 3{,}7 \quad s = 1{,}2$

1– صياغة الفرضيات: $H_0 : m = 3{,}7$

$H_1 : m < 3{,}7$

2– تحديد مناطق الرفض والقبول:

حيث أن الانحراف المعياري σ للمجتمع غير معلوم وحجم العينة كبير $n>30$، فسوف نعتمد على جدول التوزيع الطبيعي المعياري لحساب القيمة المعيارية: Z_α.



لدينا: $Pr(z \geq -z_\alpha) = 1 - \alpha$

$$\int_{-z\alpha}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1 - \alpha$$

$$\int_{-\infty}^{z\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1 - \alpha$$

$$\Phi(z_\alpha) = 0,9406$$

وحسب معطيات جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$

نجد القيمة المعيارية: $z_\alpha = 1,56$.

3– حساب إحصاءة الاختبار: $z = \dfrac{\bar{x} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \dfrac{2,2 - 3,7}{\frac{1,2}{\sqrt{60}}} = -9,682$

4– اتخاذ القرار:

نلاحظ أن قيمة إحصاءة الاختبار 9,682 – تقع في منطقة الرفض لـ: H_0 وعليه نرفض فرضية العدم بأن متوسط الفترة الزمنية لإزالة الألم للمريض تساوي 3,7 دقيقة وعليه، فالدواء الجديد أفضل من الدواء القديم من حيث الفترة اللازمة لإزالة الألم للمريض بمستوى معنوية 5,94%.

التمرين الرابع:

اختبار فرضية أن نوافق المساهمين في تقديرهم لارتفاع ربح السهم هذا العام وذلك عند مستوى معنوية 5%:

الحلّ: $s = 2$ $m_0 = 15$ $\bar{x} = 17$ $\alpha = 0,05$ $n = 7$

1– صياغة الفرضيات: $H_0 : m = 15$

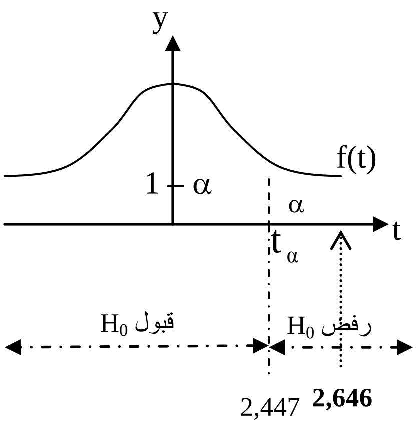
$H_1 : m > 15$

2– تحديد مناطق الرفض والقبول:

حيث أن الانحراف المعياري σ للمجتمع غير معلوم وحجم العينة صغير $n \leq 30$، فسوف نعتمد على جدول توزيع ستودانت لحساب القيمة المعيارية: t_α، بدرجة حرية:

$$\nu = n - 1 = 7 - 1 = 6$$

لدينا: $Pr(t \leq t_\alpha) = 1 - \alpha$



وحسب معطيات جدول توزيع ستودانت عند مستوى المعنوية $\alpha = 0,05$ ودرجة الحرية $\nu = 6$ نجد القيمة المعيارية $t_\alpha = 2,447$.

3– حساب إحصاءة الاختبار: $t = \dfrac{\bar{x} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \dfrac{17 - 15}{\frac{2}{\sqrt{7}}} = 2,646$

4– اتخاذ القرار:

نلاحظ أن قيمة إحصاءة الاختبار 2,646 تقع في منطقة الرفض لـ: H_0 وعليه نرفض فرضية العدم بأن متوسط ربح سهم الشركة يساوي 15 دينار وبالتالي نوافق المساهمين على توقعهم بارتفاع متوسط ربح السهم عن 15 دينار هذا العام بمستوى معنوية 5%.

وفيما يلي سلسلة تمارين الأعمال الموجهة في مقياس الإحصاء 03 لطلبة السنة الثانية ليسانس في العلوم الاقتصادية، العلوم التجارية وعلوم التسيير:

التمرين الأول:

مجتمع E مكون من العناصر: E{0, 1, 2, 4}

1- أحسب متوسط المجتمع m والإنحراف المعياري للمجتمع σ.

2- أ- أكتب كلّ العينات ذات الحجم n = 2 التي يمكن تشكيلها من المجتمع E بالإرجاع.

ب- أحسب المتوسطات $\overline{x_i}$ لهذه العينات.

جـ- أحسب الانحرافات المعيارية s_i لهذه العينات.

د- أحسب المتوسط $m_{\bar{x}}$ لتوزيع المعاينة للمتوسطات $\overline{x_i}$.

هـ- أحسب الانحراف المعياري $\sigma_{\bar{x}}$ لتوزيع المعاينة للمتوسطات $\overline{x_i}$.

3- أ- أكتب كلّ العينات ذات الحجم n = 2 التي يمكن تشكيلها من المجتمع E بدون إرجاع.

ب- أحسب المتوسطات $\overline{x_i}$ لهذه العينات.

جـ- أحسب الانحرافات المعيارية s_i لهذه العينات.

د- أحسب المتوسط $m_{\bar{x}}$ لتوزيع المعاينة للمتوسطات $\overline{x_i}$.

هـ- أحسب الانحراف المعياري $\sigma_{\bar{x}}$ لتوزيع المعاينة للمتوسطات $\overline{x_i}$.

التمرين الثاني:

مجتمع E مكون من العناصر: E{1, 2, 4, 6}

1- أحسب النسبة p للأرقام الفردية.

2- أ- أكتب كلّ العينات ذات الحجم n = 2 التي يمكن تشكيلها من المجتمع E بالإرجاع.

ب- أحسب لكلّ عينة من العينات السابقة النسبة f للأرقام الفردية.

جـ- أحسب المتوسط m_F لتوزيع المعاينة F للنسب f.

د- أحسب الانحراف المعياري σ_F لتوزيع المعاينة F للنسب f.

3- أ- أكتب كلّ العينات ذات الحجم n = 2 التي يمكن تشكيلها من المجتمع E بدون إرجاع.

ب- أحسب لكلّ عينة من العينات السابقة النسبة f للأرقام الفردية.

جـ- أحسب المتوسط m_F لتوزيع المعاينة F للنسب f.

د- أحسب الانحراف المعياري σ_F لتوزيع المعاينة F للنسب f.

التمرين الثالث:

تخضع معدلات الذكاء لطلبة مدرسة التسيير، التجارة والإعلام الآلي EGIC Ibn Rostom في تيارت للتوزيع الطبيعي بوسط حسابي 107 وبتباين 77,44.

سُحبت عينة عشوائية حجمها 121 طالباً.

1- أوجد توزيع المعاينة للوسط الحسابي لمعدلات ذكاء الطلبة لهذه العينة.

2- أحسب احتمال أن يقع المتوسط الحسابي لمعدلات الذكاء في العينة بين 105 و107.

التمرين الرابع:

تصنع آلة منتجات معينة، و بصفة عامة تنتج %3 من الوحدات المنتجة المعيبة.

تحصل زبون على صندوق به 500 وحدة مباشرةً من هذه الآلة.

1- ما هو احتمال وجود أقل من %1 من الوحدات المنتجة المعيبة داخل الصندوق؟

2- ما هو احتمال وجود أكثر من %5 من الوحدات المنتجة المعيبة داخل الصندوق؟

EGIC EGIC EGIC EGIC EGIC

التمرين الأول:

مجتمع مكون من المفردات الآتية: 2, 2, 2, 4, 5, 7, 7, 7, 8

نختار عينة عشوائية من الحجم: $n = 35$ من هذا المجتمع بإرجاع.

1- أوجد توزيع المعاينة للوسط الحسابي لمفردات هذه العينة العشوائية.

2- أحسب احتمال أن يزيد المتوسط الحسابي لمفردات هذه العينة العشوائية عن 5.

التمرين الثاني:

مجتمع مكون من القيم الآتية: 2, 2, 2, 4, 5, 6, 7, 7, 7, 8

1- أوجد متوسط المجتمع m وانحرافه المعياري σ.

2- أحسب متوسط مجتمع متوسطات العينات $m_{\bar{x}}$ وانحرافه المعياري $\sigma_{\bar{x}}$، عندما يكون حجم العينة المختارة من هذا المجتمع: $n = 2$ بدون إرجاع.

التمرين الثالث:

نفترض أن مجتمع ما يتكون من 1000 عنصر له متوسط حسابي: $m = 15$ وانحراف معياري: $\sigma = 6$.

نختار عينة عشوائية من الحجم: $n = 36$ من هذا المجتمع بدون إرجاع.

1- أوجد توزيع المعاينة للوسط الحسابي لمفردات هذه العينة العشوائية.

2- أحسب احتمال أن يقع المتوسط الحسابي لعناصر هذه العينة العشوائية بين 13 و16.

التمرين الرابع:

إذا كانت أعمار المصابيح المنتجة بواسطة أحد المصانع لها متوسط عمر: $m = 1800$ heures

وبانحراف معياري: $\sigma = 200$ heures.

- أحسب احتمال أن عينة عشوائية من 100 مصباح سوف يكون لها متوسط عمر أكبر من 1825 ساعة.

EGIC EGIC EGIC EGIC EGIC

التمرين الأول:

ينتج المصنع A بطاريات سيارة لها متوسط عمر 3,5 سنة بانحراف معياري 0,45 سنة.

نفس البطاريات تُنتج من الصنع B بمتوسط عمر 3,3 سنة وبانحراف معياري 0,3 سنة.

- ما هو احتمال أن عينة عشوائية مكونة من 30 بطارية من المصنع A يكون لها متوسط عمر على الأقل يزيد 0,4 سنة عن متوسط عمر 36 بطارية من المصنع B؟

التمرين الثاني:

مجتمع يتكون من القيم 4 ,3 ,2 ,1 إذا تم سحب كلّ العينات الممكنة من الحجم: n = 2 من هذا المجتمع بإرجاع.

1- أوجد توزيع المعاينة لـ: $\hat{p}$ والذي يُمثل نسبة ظهور الرقم 4 في العينة وأثبت أن المتوسط والتباين لتوزيع المعاينة للنسبة $\hat{p}$ هما على التوالي:

$$m_{\hat{p}} = p \quad et \quad \sigma^2_{\hat{p}} = \frac{pq}{n}$$

2- أوجد توزيع المعاينة لـ: $\hat{p}$ والذي يُمثل نسبة ظهور الرقم 4 في العينة إذا كان السحب بدون إرجاع وأثبت أن المتوسط والتباين لتوزيع المعاينة للنسبة $\hat{p}$ هما على التوالي:

$$m_{\hat{p}} = p \quad et \quad \sigma^2_{\hat{p}} = \frac{pq}{n}\,\frac{N-n}{N-1}$$

التمرين الثالث:

لنفرض أن مجتمعاً ما أفراده عدة آلاف يمثل مصنعاً لإنتاج أجهزة DVD. فإذا كان 20% من هذه الأجهزة معطوبة.

1- أوجد توزيع المعاينة لـ: p والذي يُمثل نسبة الأجهزة المعطوبة في المصنع عندما يكون: n = 300.

2- ما هو احتمال أن تكون نسبة الأجهزة المعيبة تزيد عن 19%؟

التمرين الرابع:

إذا كانت نسبة المصابين بتسوس الأسنان في مجتمع من الحجم: N= 200 هي: 20%.

سُحبت عينة عشوائية من الحجم: n = 80 بدون إرجاع.

أوجد احتمال أن تكون نسبة المصابين بتسوس في العينة أكبر من 35%.

EGIC EGIC EGIC EGIC EGIC

التمرين الأول:

مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية، اختير من إنتاجه عينة حجمها 100 مصباح لتقييم جودة الإنتاج، حيث حدد مدير المصنع معيار الجودة أن يتراوح عمر المصباح بين 1000 و1100 ساعة.

إذا كان الوسط الحسابي لعمر المصباح في العينة المختارة 1200 ساعة وانحرافه المعياري 250 ساعة، فقدر فترة الثقة 95% حول متوسط عمر المصابيح من إنتاج المصنع كلّه مع تفسير النتيجة.

التمرين الثاني: إذا كان وزن الدجاج بالغرام في أحد المزارع بعد 45 يوم يتبع التوزيع الطبيعي.

نختار عينة عشوائية من أحد المزارع المنتجة للدجاج حجمها 25 دجاجة، ووجد أن متوسط وزن الدجاج في هذه العينة 890 غرام والانحراف المعياري لها 200 غرام.

1- أوجد فترة الثقة 95% حول متوسط وزن الدجاج في المزرعة مع تفسير النتيجة.

2- إذا عُلم من الخبرات السابقة أن تباين وزن الدجاج في المزرعة 62500 غرام، فأوجد فترة الثقة 95% حول متوسط وزن الدجاج في المزرعة مع تفسير النتيجة.

التمرين الثالث:

إذا كانت دخول مجموعة من الأفراد في دولة ما تتبع التوزيع الطبيعي، وسُحبت منهم عينة عشوائية حجمها 10 أفراد بوسط حسابي 7200 دينار وانحراف معياري 640 دينار.

أوجد فترة الثقة 95% حول متوسط دخول الأفراد في هذه الدولة مع تفسير النتيجة.

التمرين الرابع:

إذا كان متوسط الزيادة في أجور العاملين في إحدى المؤسسات عام 2008 هو 3600 دينار.

وفي عام 2011 أُخذت عينة من 64 فرداً من العاملين في هذه المؤسسة، فوُجد أن الوسط الحسابي للزيادة في أجورهم 4000 دينار بانحراف معياري 800 دينار.

هل يدل ذلك على أن متوسط الزيادة في أجور العاملين في المؤسسة عام 2011 قد اختلف عن متوسط الزيادة في الأجور عام 2008؟ وذلك عند مستوى معنوية 5%.

التمرين الخامس:

إذا كان أحد مصانع المواد الغذائية ينتج نوعاً من الألبان حيث يصل متوسط وزن العبوة 240 غرام، وذلك بانحراف معياري 18 غرام حيث كانت أوزان العبوات تتبع التوزيع الطبيعي.

تم أخذ عينة من 9 عبوات لإجراء اختبار الرقابة على الجودة، فوُجد أن متوسط وزن العبوة 235 غرام.

هل ترى أن هناك عيباً بالإنتاج مما أدى إلى انخفاض متوسط وزن العبوة؟ وذلك عند مستوى معنوية 5%.

EGIC EGIC EGIC EGIC EGIC

حلّول سلسلة تمارين الأعمال الموجهة:

سلسلة تمارين الأعمال الموجهة 1

التمرين الأول:

1- حساب متوسط المجتمع m والانحراف المعياري للمجتمع δ:

المتوسط الحسابي للمجتمع:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N} = \frac{0+1+2+4}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\mathbf{m = 1,75}$$

الانحراف المعياري للمجتمع:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{4}(x_i - m)^2}{N}}$$

x_i	$x_i - m$	$(x_i - m)^2$
0	– 1,75	3,0625
1	– 0,75	0,5625
2	0,25	0,0625
4	2,25	5,0625
Total	0	8,75

$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{\frac{8,75}{4}} \approx 1,479}$$

2- أ- كتابة كلّ العينات ذات الحجم n = 2 التي يمكن تشكيلها من المجتمع E بالإرجاع:

كلّ العينات التي يمكن اختيارها (عددها: $N^n = 4^2 = 16$) من هذا المجتمع. وهي كالتالي:

00	01	02	04
10	11	12	14
20	21	22	24
40	41	42	44

ب- حساب المتوسطات $\overline{x_i}$ لهذه العينات:

كلّ عينة من 16 عينة هذه تقبل متوسط حسابي $\bar{x}$ كالتالي:

0	0,5	1	2
0,5	1	1,5	2,5
1	1,5	2	3
2	2,5	3	4

وبذلك نتحصل على توزيع المعاينة للمتوسطات $\overline{x_i}$.

ج- حساب الانحرافات المعيارية s_i لهذه العينات:

كلّ عينة من 16 عينة هذه تقبل انحراف معياري s_i كالتالي:

0	0,5	1	2
0,5	0	0,5	1,5
1	0,5	0	1
2	1,5	1	0

وبذلك نتحصل على توزيع المعاينة للانحرافات المعيارية s_i.

د- حساب المتوسط $m_{\bar{x}}$ لتوزيع المعاينة للمتوسطات $\overline{x_i}$:

$$m_{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{16} \overline{xi}}{16} = \frac{0+0,5+\ldots+3+4}{16} = \frac{28}{16}$$

$$m_{\bar{x}} = 1,75$$

وبذلك نتحصل على النتيجة النظرية التالية:

$$m_{\bar{x}} = m = 1,75$$

هـ- حساب الانحراف المعياري $\delta_{\bar{x}}$ لتوزيع المعاينة للمتوسطات $\overline{x_i}$.

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{16}(x_i - m)^2}{16}}$$

توزيع المعاينة لانحرافات المتوسطات $\overline{x_i}$ عن المتوسط $m_{\bar{x}}$ يأتي كالتالي:

– 1,75	– 1,25	– 1,75	0,25
– 1,25	– 0,75	– 1,75	0,75
– 0,75	– 0,25	0,25	1,25
0,25	0,75	1,25	2,25

توزيع المعاينة لمربع انحرافات المتوسطات $\overline{x_i}$ عن المتوسط $m_{\bar{x}}$ يأتي كالتالي:

3,0625	1,5625	0,5625	0,0625
1,5625	0,5625	0,0625	0,5625
0,5625	0,0625	0,0625	1,5625
0,0625	0,5625	1,5625	5,0625

الانحراف المعياري $\delta_{\bar{x}}$ لتوزيع المعاينة للمتوسطات $\overline{x_i}$ يكون كالآتي:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{3,0625+1,5625+....+1,5625+5,0625}{16}} = \sqrt{\frac{17,5}{16}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\frac{17,5}{16}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\frac{8,75}{4}}}{\sqrt{2}}$$

وبذلك نتحصل على النتيجة النظرية التالية:

$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sqrt{\frac{8,75}{4}}}{\sqrt{2}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}}}$$

3- أ- كتابة كلّ العينات ذات الحجم n = 2 التي يمكن تشكيلها من المجتمع E بدون إرجاع:

كلّ العينات التي يمكن اختيارها (عددها: $C_N^n = C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$) من هذا المجتمع.

وهي كالتالي:

03	02	01
14	12	
24		

ب- حساب المتوسطات $\overline{X_i}$ لهذه العينات:

كلّ عينة من 6 عينات هذه تقبل متوسط حسابي $\overline{x}$ كالتالي:

2	1	0,5
2,5	1,5	
3		

وبذلك نتحصل على توزيع المعاينة للمتوسطات $\overline{X_i}$.

ج- حساب الانحرافات المعيارية s_i لهذه العينات:

كلّ عينة من 6 عينات هذه تقبل انحراف معياري $\mathbf{s_i}$ كالتالي:

2	1	0,5
2,5	0,5	
1		

وبذلك نتحصل على توزيع المعاينة للانحرافات المعيارية s_i .

د- حساب المتوسط $m_{\bar{x}}$ لتوزيع المعاينة للمتوسطات $\overline{X_i}$:

$$m_{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{6} \bar{x}i}{6} = \frac{0,5+1+\ldots+2,5+3}{6} = \frac{10,5}{6}$$

$$\mathbf{m_{\bar{x}} = 1,75}$$

وبذلك نتحصل على النتيجة النظرية التالية:

$$\mathbf{m_{\bar{x}} = m = 1,75}$$

هـ- حساب الانحراف المعياري $\delta_{\bar{x}}$ لتوزيع المعاينة للمتوسطات $\overline{x_i}$.

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6}(x_i - m)^2}{6}}$$

توزيع المعاينة لانحرافات المتوسطات $\overline{x_i}$ عن المتوسط $m_{\bar{x}}$ يأتي كالتالي:

$-1,25$	$-0,75$	$0,25$
	$-0,25$	$0,75$
		$1,25$

توزيع المعاينة لمربع انحرافات المتوسطات $\overline{x_i}$ عن المتوسط $m_{\bar{x}}$ يأتي كالتالي:

1,5625	0,5625	0,0625
	0,0625	0,5625
		1,5625

الانحراف المعياري $\delta_{\bar{x}}$ لتوزيع المعاينة للمتوسطات $\overline{x_i}$ يكون كالآتي:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1,5625+0,5625+\ldots.+0,5625+1,5625}{6}} = \sqrt{\frac{4,375}{6}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\frac{4,375}{6}}\sqrt{\frac{4-2}{4-1}}}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{4-2}{4-1}}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{8,75}{4}}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{4-2}{4-1}}$$

وبذلك نتحصل على النتيجة النظرية التالية:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sqrt{\frac{8,75}{4}}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{4-2}{4-1}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

التمرين الثالث:

1- إيجاد توزيع المعاينة للوسط الحسابي لمعدلات ذكاء الطلبة لهذه العينة:

توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{x}$ (متوسط معدلات ذكاء الطلبة لهذه العينة) يقترب من التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي x بوسط حسابي: $m_{\bar{x}} = m = 107$ وبانحراف معياري: $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} = \frac{8,8}{\sqrt{121}} = 0,8$.

2- حساب احتمال أن يقع المتوسط الحسابي لمعدلات الذكاء بين 105 و110:

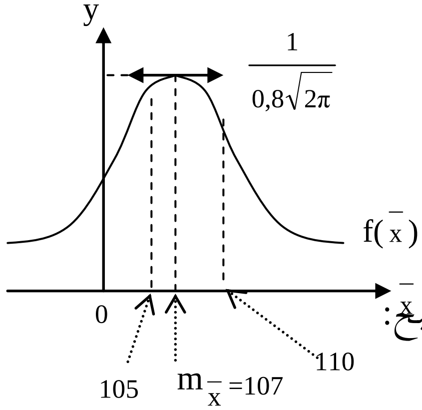
بما أن توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{x}$ يقترب من التوزيع الطبيعي، فيمكن تعريف دالة كثافته الاحتمالية كالآتي:

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{\sigma_{\bar{x}}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{x}-m_{\bar{x}}}{\delta_{\bar{x}}}\right)^2}$$

حيث $m_{\bar{x}}$ و $\sigma_{\bar{x}}$ يمثلان على التوالي المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{x}$.

وعليه، فإن احتمال أن يقع المتوسط الحسابي لمعدلات الذكاء بين 105 و110 يمكن حسابه كالتالي:

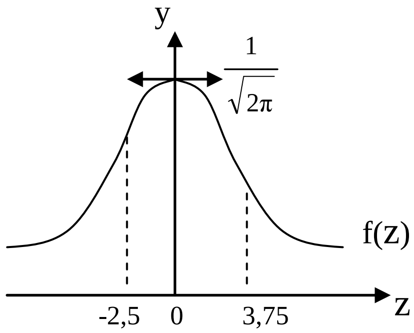
$$\Pr(110 > \bar{x} > 105) = \int_{105}^{110} \frac{1}{0,8\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{x}-107}{0,8}\right)^2} d\bar{x}$$



نضع: $z = \frac{\bar{x}-107}{0,8}$، فيصبح:

$$dz = \frac{1}{0,8} d\bar{x} \Rightarrow d\bar{x} = 0,8dz$$

$$\Pr(110 > \bar{x} > 105) = \int_{\frac{105-107}{0,8}}^{\frac{110-107}{0,8}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \int_{-2,5}^{3,75} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$



من الشكل نلاحظ أن:

$$\Pr(110 > \bar{x} > 105) = \int_{-\infty}^{3,75} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz - \int_{-\infty}^{-2,5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$\Pr(110 > \bar{x} > 105) = \int_{-\infty}^{3,75} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz - \int_{2,5}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$\Pr(110 > \bar{x} > 105) = \int_{-\infty}^{3,75} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz - [1 - \int_{-\infty}^{2,5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz]$$

$$\Pr(110 > \bar{x} > 105) = \Phi(3,75) - 1 + \Phi(2,5)$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ نجد:

$$\Pr(110 > \bar{x} > 105) = 0,9999 - 1 + 0,9938$$

$$\mathbf{\Pr(110 > \bar{x} > 105) = 0,9937}$$

وهو احتمال أن يقع المتوسط الحسابي لمعدلات الذكاء بين 105 و110.

التمرين الرابع:

1- إيجاد احتمال وجود أقل من 1% من الوحدات المنتجة المعيبة داخل الصندوق:

نسبة الوحدات المنتجة المعيبة من هذه الآلة: $p = \%3 = 0,03$

يمكن اعتبار العينة ذات الحجم $n = 500$ مختارة من مجتمع غير منتهي لأن الآلة تنتج لمدة طويلة.

توزيع المعاينة لنسبة الوحدات المنتجة المعيبة $\hat{p}$ يقترب من التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي x الذي يُقترن بعدد الوحدات المنتجة المعيبة بوسط حسابي: $\mathbf{m_{\hat{p}}} = p = \mathbf{0,03}$

وبانحراف معياري: $= \sqrt{\frac{(0,03)(0,97)}{500}} = 0,0076 \quad \sqrt{\frac{pq}{n}} \ \boldsymbol{\sigma_{\hat{p}}} =$.

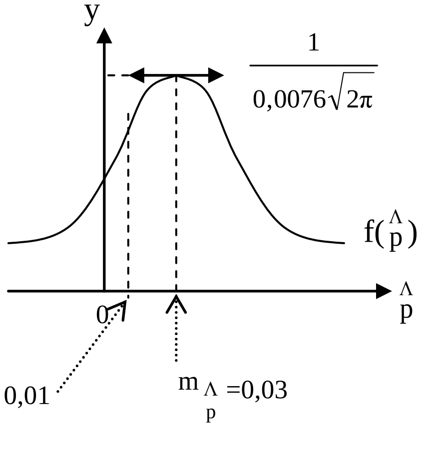
بما أن توزيع المعاينة لنسبة الوحدات المنتجة المعيبة $\hat{p}$ يقترب من التوزيع الطبيعي، فيمكن تعريف دالة كثافته الاحتمالية كالتالي:

$$f(\hat{p}) = \frac{1}{\delta_{\hat{p}}\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{p} - m_{\hat{p}}}{\delta_{\hat{p}}}\right)^2}$$

حيث $m_{\hat{p}}$ و $\sigma_{\hat{p}}$ يمثلان على التوالي المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة لنسبة النجاحات $\hat{p}$.

وعليه، فإن الاحتمال المطلوب يُعرف كالتالي:

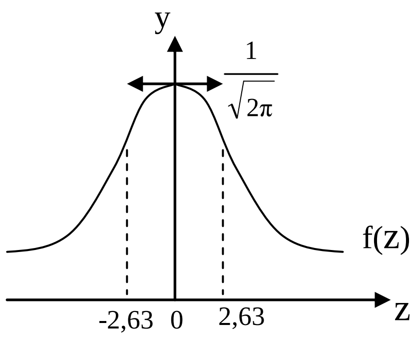
$$\Pr(\hat{p} < 0,01) = \int_{-\infty}^{0,01} \frac{1}{0,0076\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{p} - 0,03}{0,0076}\right)^2} d\hat{p}$$



نضع: $z = \dfrac{\hat{p} - 0,03}{0,0076}$، فيصبح:

$$dz = \frac{1}{0,0076} d\hat{p} \Rightarrow d\hat{p} = 0,0076dz$$

$$\Pr(\hat{p} < 0,01) = \int_{-\infty}^{\frac{0,01-0,03}{0,0076}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \int_{-\infty}^{-2,63} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$



من الشكل نلاحظ أن:

$$\Pr(\hat{p} < 0,01) = \int_{2,63}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1 - \int_{-\infty}^{2,63} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1 - \Phi(2,63)$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ نجد:

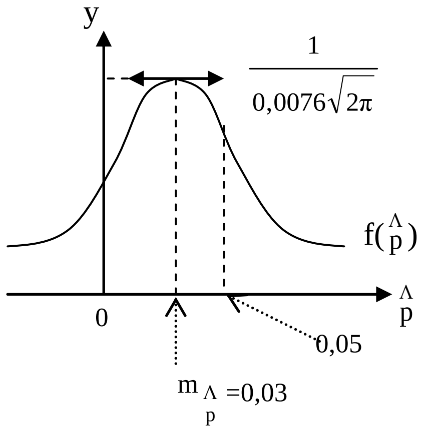
$$\mathbf{Pr}\ (\hat{\mathbf{p}} < \mathbf{0,01}) = 1 - 0,9957 = \mathbf{0,0043}$$

وهو وجود أقل من 1% من الوحدات المنتجة المعيبة داخل الصندوق.

2- إيجاد احتمال وجود أكثر من 5% من الوحدات المنتجة المعيبة داخل الصندوق:

الاحتمال المطلوب يُعرف كالتالي:

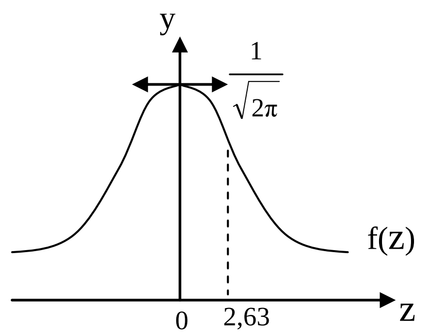
$$\Pr(\hat{p} > 0{,}05) = \int_{0{,}05}^{+\infty} \frac{1}{0{,}0076\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{p}-0{,}03}{0{,}0076}\right)^2} d\hat{p}$$



نضع: $z = \frac{\hat{p}-0{,}03}{0{,}0076}$، فيصبح:

$$dz = \frac{1}{0{,}0076} d\hat{p} \Rightarrow d\hat{p} = 0{,}0076dz$$

$$\Pr(\hat{p} > 0{,}05) = \int_{\frac{0{,}05-0{,}03}{0{,}0076}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \int_{2{,}63}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$



من الشكل نلاحظ أن:

$$\Pr(\hat{p} > 0{,}05) = 1 - \int_{-\infty}^{2{,}63} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1 - \Phi(2{,}63)$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ نجد:

$$\textbf{Pr}\ (\hat{p} > 0{,}05) = 1 - 0{,}9957 = \mathbf{0{,}0043}$$

وهو وجود أكثر من 5% من الوحدات المنتجة المعيبة داخل الصندوق.

سلسلة تمارين الأعمال الموجهة 2

التمرين الأول:

1- إيجاد توزيع المعاينة للوسط الحسابي لمفردات هذه العينة العشوائية:

المتوسط الحسابي للمجتمع:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N} = \frac{2+2+2+4+5+7+7+7++8}{9} = \frac{44}{9}$$

$$\mathbf{m \approx 4{,}889}$$

الانحراف المعياري للمجتمع:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{4}(x_i - m)^2}{N}}$$

x_i	$x_i - m$	$(x_i - m)^2$
2	– 2,889	8,346
2	– 2,889	8,346
2	– 2,889	8,346
4	– 0,889	0,790
5	0,111	0,012
7	2,111	4,457
7	2,111	4,457
7	2,111	4,457
8	3,111	9,679
Total	0	48,889

$$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\frac{\mathbf{48{,}889}}{\mathbf{9}}} \approx \mathbf{2{,}331}$$

حيث أن $n \geq 30$، فإن توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{x}$ الذي يمثل متوسط المفردات يقترب من التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي x بوسط حسابي: $\mathbf{m_{\bar{x}} = m = 4,889}$ وبانحراف معياري:

$$\boldsymbol{= \frac{\delta}{\sqrt{n}} = \frac{2,331}{\sqrt{35}} \approx 0,394\ \sigma_{\bar{x}}}$$.

2- حساب احتمال أن يزيد المتوسط الحسابي لمفردات هذه العينة العشوائية عن 5:

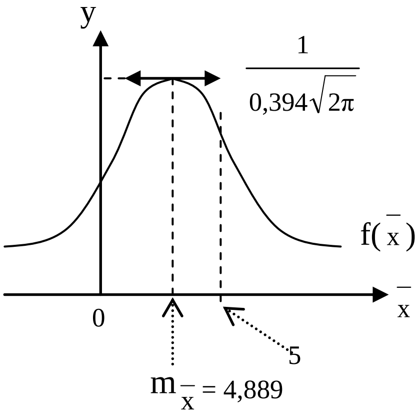
بما أن توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{x}$ يقترب من التوزيع الطبيعي، فيمكن تعريف دالة كثافته الاحتمالية كالآتي:

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{\delta_{\bar{x}}\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{x} - m_{\bar{x}}}{\delta_{\bar{x}}}\right)^2}$$

حيث $m_{\bar{x}}$ و $\sigma_{\bar{x}}$ يمثلان على التوالي المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{x}$.

وعليه، فإن احتمال أن يزيد المتوسط الحسابي لمفردات هذه العينة العشوائية عن 5 يمكن حسابه كالتالي:

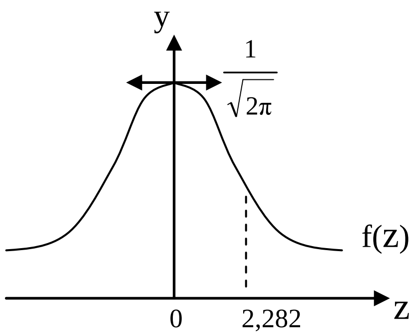
$$\Pr(\bar{x} > 5) = \int_{5}^{+\infty} \frac{1}{0,394\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{x} - 4,889}{0,394}\right)^2} d\bar{x}$$



نضع: $z = \frac{\bar{x} - 4,889}{0,394}$، فيصبح:

$$dz = \frac{1}{0,394} d\bar{x} \Rightarrow d\bar{x} = 0,394dz$$

$$\Pr(\bar{x} > 5) = \int_{\frac{5-4,889}{0,394}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \int_{0,282}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$



من الشكل نلاحظ أن:

$$Pr(\bar{x} > 5) = 1 - \int_{-\infty}^{2,282} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1 - \Phi(2,282)$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ نجد:

$$\mathbf{Pr(\bar{x} > 5) = 1 - 0,6103 = 0,3897}$$

وهو احتمال أن يزيد المتوسط الحسابي لمفردات هذه العينة العشوائية عن 5.

التمرين الثاني:

1- إيجاد متوسط المجتمع m وانحرافه المعياري σ:

المتوسط الحسابي للمجتمع:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N} = \frac{2+2+2+4+5+6+7+7+7++8}{10} = \frac{50}{10}$$

$$\mathbf{m = 5}$$

الانحراف المعياري للمجتمع:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{4}(x_i - m)^2}{N}}$$

x_i	$x_i - m$	$(x_i - m)^2$
2	– 3	9
2	– 3	9
2	– 3	9
4	– 1	1
5	0	0
6	1	1
7	2	4
7	2	4
7	2	4
8	3	9
Total	0	50

$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{\frac{50}{10}} \approx 2{,}236}$$

2- حساب متوسط مجتمع متوسطات العينات $m_{\bar{x}}$ وانحرافه المعياري $\sigma_{\bar{x}}$، عندما يكون حجم العينة المختارة من هذا المجتمع: $n = 2$ بدون إرجاع:

توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{x}$ الذي يمثل متوسط المفردات يقترب من التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي x بوسط حسابي: $\boldsymbol{m_{\bar{x}} = m = 4{,}889}$ =

وحيث أن $0{,}05N = 0{,}05(10) = 0{,}5$ و$n = 2$، فإن $n > 0{,}05N$.

وعلى ذلك لا يمكننا إهمال معامل التصحيح في صيغة حساب الانحراف المعياري $\delta_{\bar{x}}$ وبالتالي يكون: $\boldsymbol{\sigma_{\bar{x}}} = \sqrt{\frac{10-2}{10-1}}\ \frac{2{,}236}{\sqrt{2}} = \sqrt{\boldsymbol{\frac{N-n}{N-1}}}\ \boldsymbol{\frac{\delta}{\sqrt{n}}} = \ \boldsymbol{\approx 1{,}4933}\ \sqrt{\frac{8}{9}}\ \frac{2{,}236}{\sqrt{2}}$.

التمرين الثالث:

1- إيجاد توزيع المعاينة للوسط الحسابي لمفردات هذه العينة العشوائية:

توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{x}$ الذي يمثل متوسط المفردات يقترب من التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي x بوسط حسابي: $\boldsymbol{m_{\bar{x}} = m = 15}$ =

وحيث أن $0,05N = 0,05(1000) = 50$ و$n = 36$، فإن $n < 0,05N$.

يمكن إهمال معامل التصحيح في صيغة حساب الانحراف المعياري $\delta_{\bar{x}}$ وبالتالي يكون:

$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} = \frac{6}{\sqrt{36}} = 1}$$

2- حساب احتمال أن يقع المتوسط الحسابي لعناصر هذه العينة العشوائية بين 13 و16:

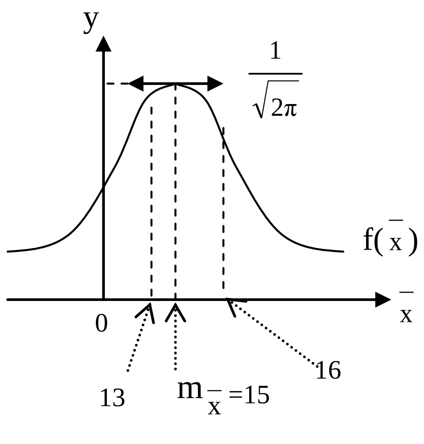
بما أن توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{x}$ يقترب من التوزيع الطبيعي، فيمكن تعريف دالة كثافته الاحتمالية كالآتي:

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{\delta_{\bar{x}}\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{x}-m_{\bar{x}}}{\delta_{\bar{x}}}\right)^2}$$

حيث $m_{\bar{x}}$ و $\delta_{\bar{x}}$ يمثلان على التوالي المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{x}$.

وعليه، فإن احتمال أن يقع المتوسط الحسابي لعناصر هذه العينة العشوائية بين 13 و16 يمكن حسابه كالتالي:

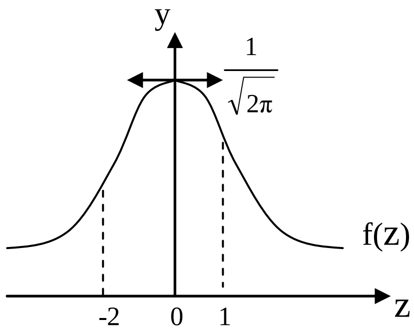
$$Pr(16 > \bar{x} > 13) = \int_{13}^{16} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{x}-15}{1}\right)^2} d\bar{x}$$



نضع: $z = \frac{\bar{x}-15}{1}$، فيصبح:

$$dz = d\bar{x}$$

$$\Pr(16 > \bar{x} > 13) = \int_{\frac{13-15}{1}}^{\frac{16-15}{1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz = \int_{-2}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz$$



من الشكل نلاحظ أن:

$$\Pr(16 > \bar{x} > 13) = \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz - \int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz$$

$$\Pr(16 > \bar{x} > 13) = \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz - \int_{2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz$$

$$\Pr(16 > \bar{x} > 13) = \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz - \left[1 - \int_{-\infty}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz\right]$$

$$\Pr(16 > \bar{x} > 13) = \Phi(1) - 1 + \Phi(2)$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ نجد:

$$\Pr(16 > \bar{x} > 13) = 0{,}8414 - 1 + 0{,}9772$$

$$\mathbf{\Pr(16 > \bar{x} > 13) = 0{,}8186}$$

وهو احتمال أن يقع المتوسط الحسابي لعناصر هذه العينة العشوائية بين 13 و16.

التمرين الرابع:

1- حساب احتمال أن عينة عشوائية من 100 مصباح يكون لها متوسط أكبر من 1825 ساعة:

في هذه الحالة المجتمع كبير والعينة كذلك كبيرة، وعلى ذلك فإن توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{x}$ الذي يمثل متوسط عمر المصابيح يقترب من التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي x بوسط حسابي: $\mathbf{m_{\bar{x}} = m = 1800}$ وبانحراف معياري: $\boldsymbol{\sigma_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} = \frac{200}{\sqrt{100}} = 20}$.

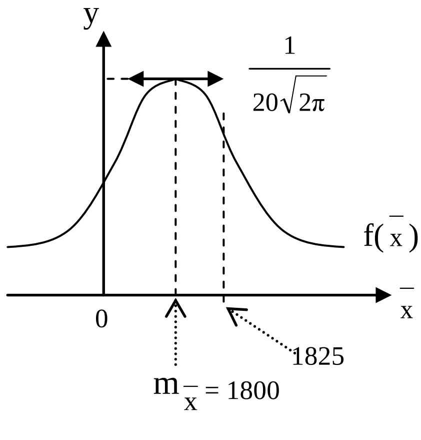
بما أن توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{x}$ يقترب من التوزيع الطبيعي، فيمكن تعريف دالة كثافته الاحتمالية كالآتي:

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{\delta_{\bar{x}}\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{x}-m_{\bar{x}}}{\delta_{\bar{x}}}\right)^2}$$

حيث $m_{\bar{x}}$ و $\sigma_{\bar{x}}$ يمثلان على التوالي المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{x}$.

وعليه، فإن احتمال أن يكون المتوسط الحسابي لعناصر هذه العينة العشوائية أكبر من 1825 يمكن حسابه كالتالي:

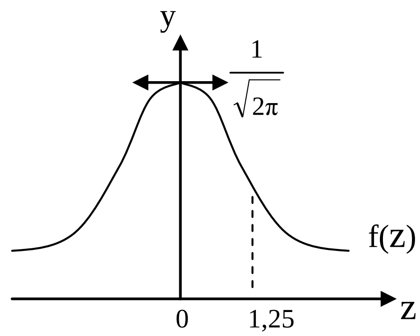
$$\Pr(\bar{x} > 1825) = \int_{1825}^{+\infty} \frac{1}{20\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{x}-1800}{20}\right)^2} d\bar{x}$$



نضع: $z = \frac{\bar{x}-1800}{20}$، فيصبح:

$$dz = \frac{1}{20} d\bar{x} \Rightarrow d\bar{x} = 20dz$$

$$\Pr(\bar{x} > 1800) = \int_{\frac{1825-1800}{20}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \int_{1,25}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$



من الشكل نلاحظ أن:

$$\Pr(\bar{x} > 1825) = 1 - \int_{-\infty}^{1,25} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1 - \Phi(1,25)$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ نجد:

$$\mathbf{\Pr(\bar{x} > 1825) = 1 - 0,8943 = 0,1056}$$

وهو احتمال أن يزيد المتوسط الحسابي لمفردات هذه العينة العشوائية عن 1825.

سلسلة تمارين الأعمال الموجهة 3

التمرين الأول:

1- إيجاد احتمال أن عينة مكونة من 30 بطارية من المصنع A يكون لها متوسط عمر على الأقل يزيد 0,4 سنة عن متوسط عمر 36 بطارية من المصنع B:

	المصنع A	**المصنع B**
حجم العينة	$n_A = 30$	$n_B = 36$
الوسط الحسابي	$m_A = 3,5$	$m_B = 3,3$
الانحراف المعياري	$\delta_A = 0,45$	$\delta_B = 0,3$

توزيع المعاينة للفرق بين المتوسطين $\bar{x}_A - \bar{x}_B$ (الفرق بين متوسط عمر البطاريات من المصنع A ومتوسط عمر البطاريات من المصنع B) يقترب من التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي x بوسط حسابي: $\mathbf{m_{\bar{x}A - \bar{x}B}} = m_A - m_B = 3,5 - 3,3 = \mathbf{0,2}$

وبانحراف معياري: $\sigma_{\bar{x}A - \bar{x}B} = \sqrt{\dfrac{\sigma_A^2}{n_A} + \dfrac{\sigma_B^2}{n_B}}$

$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{x}A - \bar{x}B}} = \sqrt{\frac{0,45^2}{30} + \frac{0,30^2}{36}} = \mathbf{0,096177}$$

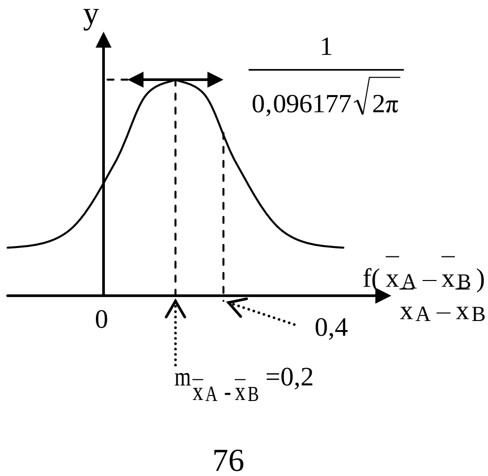
بما أن توزيع المعاينة للفرق بين المتوسطين $\bar{x}_A - \bar{x}_B$ يقترب من التوزيع الطبيعي، فيمكن تعريف دالة كثافته الاحتمالية كالآتي:

$$f(\bar{x}_A - \bar{x}_B) = \frac{1}{\delta_{\bar{x}A - \bar{x}B}\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(\bar{x}_A - \bar{x}_B) - m_{\bar{x}A - \bar{x}B}}{\delta_{\bar{x}A - \bar{x}B}}\right]^2}$$

حيث $m_{\bar{x}A - \bar{x}B}$ و $\delta_{\bar{x}A - \bar{x}B}$ يمثلان على التوالي المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للفرق بين الوسطين $\bar{x}_A - \bar{x}_B$.

وعليه، فإن احتمال أن يزيد الفرق بين متوسط عمر البطاريات من المصنع A ومتوسط عمر البطاريات من المصنع B يمكن حسابه كالتالي:

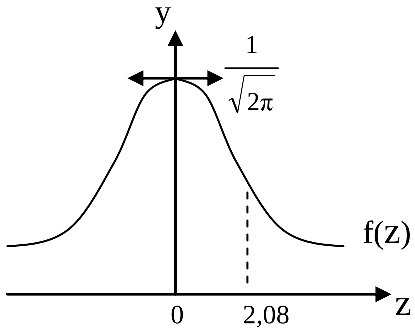
$$\Pr\left[(\bar{x}_A - \bar{x}_B) > 0,4\right] = \int_{0,4}^{+\infty} \frac{1}{0,096177\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(\bar{x}_A - \bar{x}_B) - 0,2}{0,096177}\right]^2} d(\bar{x}_A - \bar{x}_B)$$



نضع: $z = \frac{(\bar{x}_A - \bar{x}_B) - 0,2}{0,096177}$، فيصبح:

$$dz = \frac{1}{0,096177} d(\bar{x}_A - \bar{x}_B) \Rightarrow d(\bar{x}_A - \bar{x}_B) = 0,096177dz$$

$$\Pr\left[(\bar{x}_A - \bar{x}_B) > 0,4\right] = \int_{\frac{0,4-0,2}{0,096177}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \int_{2,08}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$



من الشكل نلاحظ أن:

$$\Pr\left[(\bar{x}_A - \bar{x}_B) > 0,4\right] = 1 - \int_{-\infty}^{2,08} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1 - \Phi(2,08)$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ نجد:

$$\mathbf{Pr\left[(\bar{x}_A - \bar{x}_B) > 0,4\right] = 1 - 0,9812 = 0,0188}$$

وهو احتمال أن عينة مكونة من 30 بطارية من المصنع A يكون لها متوسط عمر على الأقل يزيد 0,4 سنة عن متوسط عمر 36 بطارية من المصنع B.

التمرين الثاني:

1- إيجاد توزيع المعاينة لـ: $\hat{p}$ والذي يُمثل نسبة ظهور الرقم 4 في العينة إذا كان السحب بإرجاع وإثبات أن المتوسط والتباين لتوزيع المعاينة للنسبة $\hat{p}$ هما على التوالي:

$$m_{\hat{p}} = p \quad et \quad \sigma^2_{\hat{p}} = \frac{pq}{n}$$

كلّ العينات التي يمكن اختيارها من هذا المجتمع بإرجاع (عددها: $N^n = 4^2 = 16$). وهي كالتالي:

11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34
41	42	43	44

نسبة ظهور الرقم 4 في كل عينة من 16 عينة تكون كالتالي:

0	0	0	0,5
0	0	0	0,5
0	0	0	0,5
05	0,5	0,5	1

وبذلك نتحصل على توزيع المعاينة للنسبة $\hat{p}_i$.

التوزيع التكراري لنسبة ظهور الرقم 4 في كل عينة من 16 عينة يأتي كالتالي:

$\hat{p}_i$	0	0,5	1
f_i	9	6	1

يمكن إيجاد المتوسط الحسابي $m_{\hat{p}}$ والتباين $\sigma^2_{\hat{p}}$ للتوزيع من الجدول التكراري التالي:

$$m_{\hat{p}} = \frac{\sum_{i=1}^{3} f_i \hat{p}_i}{\sum_{i=1}^{3} f_i}$$

$\hat{p}_i$	f_i	$f_i\ \hat{p}_i$	$f_i\ \hat{p}_i^{2}$
0	9	0	0
0,5	6	3	1,5
1	1	1	1
Total	16	4	2,5

$$m_{\hat{p}} = \frac{4}{16}$$

$$\mathbf{m_{\hat{p}} = 0,25 = p}$$

$$\sigma^2_{\hat{p}} = \frac{\sum_{i=1}^{3} f_i\, \hat{p}_i^{2}}{\sum_{i=1}^{3} f_i} - m^2_{\hat{p}}$$

$$\sigma^2_{\hat{p}} = \frac{2,5}{16} - (0,25)^2 = \frac{2,5-1}{16} = \frac{1,5}{16} = \frac{0,1875}{2}$$

$$\boldsymbol{\sigma^2_{\hat{p}} = \frac{(0,25)(0,75)}{2} = \frac{pq}{n}}$$

يمكن إيجاد التباين $\sigma^2_{\hat{p}}$ للتوزيع من الجدول التكراري باستخدام الصيغة التالية:

$$\sigma^2_{\hat{p}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (\hat{p}_i - m_{\hat{p}})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

$\hat{p}_i$	f_i	$\hat{p}_i - m_{\hat{p}}$	$(\hat{p}_i - m_{\hat{p}})^2$	$f_i(\hat{p}_i - m_{\hat{p}})^2$
0	9	– 0,25	0,0625	0,5625
0,5	6	0,25	0,0625	0,375
1	1	0,75	0,5625	05625
Total	16	---	---	1,5

$$\sigma^2_{\hat{p}} = \frac{1,5}{16} = \frac{0,1875}{2}$$

$$\sigma^2_{\hat{p}} = \frac{(0,25)(0,75)}{2} = \frac{pq}{n}$$

2- إيجاد توزيع المعاينة لـ: $\hat{p}$ والذي يُمثل نسبة ظهور الرقم 4 في العينة إذا كان السحب بدون إرجاع وإثبات أن المتوسط والتباين لتوزيع المعاينة للنسبة $\hat{p}$ هما على التوالي:

$$m_{\hat{p}} = p \quad et \quad \sigma^2_{\hat{p}} = \frac{pq}{n}\frac{N-n}{N-1}$$

كلّ العينات التي يمكن اختيارها من هذا المجتمع بدون إرجاع (عددها: $= 6\frac{4!}{2!(4-2)!} =$ $C_4^2 = C_N^n$). وهي كالتالي:

12	13	14
	23	24
		34

نسبة ظهور الرقم 4 في كل عينة من 6 عينة تكون كالتالي:

12	13	14
	23	24
		34

وبذلك نتحصل على توزيع المعاينة للنسبة $\hat{p}_i$.

التوزيع التكراري لنسبة ظهور الرقم 4 في كل عينة من 6 عينات يأتي كالتالي:

$\hat{p}_i$	0	0,5
f_i	3	3

يمكن إيجاد المتوسط الحسابي $m_{\hat{p}}$ والتباين $\sigma^2_{\hat{p}}$ للتوزيع من الجدول التكراري التالي:

$$m_{\hat{p}} = \frac{\sum_{i=1}^{2} f_i \hat{p}_i}{\sum_{i=1}^{2} f_i}$$

$\hat{p}_i$	f_i	$f_i\,\hat{p}_i$	$f_i\,\hat{p}_i^2$
0 0,5	3 3	0 1,5	0 0,75
Total	6	1,5	0,75

$$m_{\hat{p}} = \frac{1,5}{6}$$

$$\mathbf{m_{\hat{p}} = 0,25 = p}$$

$$\sigma^2_{\hat{p}} = \frac{\sum_{i=1}^{3} f_i\,\hat{p}_i^2}{\sum_{i=1}^{3} f_i} - m^2_{\hat{p}}$$

$$\sigma^2_{\hat{p}} = \frac{0,75}{6} - (0,25)^2 = \frac{0,75-0,375}{6} = \frac{0,375}{6} = \frac{2(0,25)(0,75)}{2(3)} = \frac{(0,25)(0,75)}{2}\cdot\frac{2}{3}$$

$$\boldsymbol{\sigma^2_{\hat{p}} = \frac{(0,25)(0,75)}{2}\,\frac{4-2}{4-1} = \frac{pq}{n}\,\frac{N-n}{N-1}}$$

يمكن إيجاد التباين $\sigma^2_{\hat{p}}$ للتوزيع من الجدول التكراري باستخدام الصيغة التالية:

$$\sigma^2_{\hat{p}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(\hat{p}_i - m_{\hat{p}})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

$\hat{p}_i$	f_i	$\hat{p}_i - m_{\hat{p}}$	$(\hat{p}_i - m_{\hat{p}})^2$	$f_i(\hat{p}_i - m_{\hat{p}})^2$
0 0,5	3 3	– 0,25 0,25	0,0625 0,0625	0,1875 0,1875
Total	6	---	---	0,375

$$\sigma^2_{\hat{p}} = \frac{0,375}{6} = \frac{2(0,25)(0,75)}{2(3)} = \frac{(0,25)(0,75)}{2}\cdot\frac{2}{3}$$

$$\boldsymbol{\sigma^2_{\hat{p}} = \frac{(0,25)(0,75)}{2}\,\frac{4-2}{4-1} = \frac{pq}{n}\,\frac{N-n}{N-1}}$$

التمرين الثاث:

1- إيجاد توزيع المعاينة لـ: $\hat{p}$ والذي يُمثل نسبة الأجهزة المعطوبة في المصنع عندما يكون: n = 300:

توزيع المعاينة لنسبة الأجهزة المعطوبة $\hat{p}$ يقترب من التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي x بوسط حسابي: $\mathbf{m_{\hat{p}}} = p = \mathbf{0{,}2}$

وبانحراف معياري: $= \sqrt{\frac{(0{,}2)(0{,}8)}{300}} = 0{,}023 \quad \sqrt{\frac{pq}{n}} \; \sigma_{\hat{p}} =$.

2- إيجاد احتمال أن تكون نسبة الأجهزة المعيبة تزيد عن 19%:

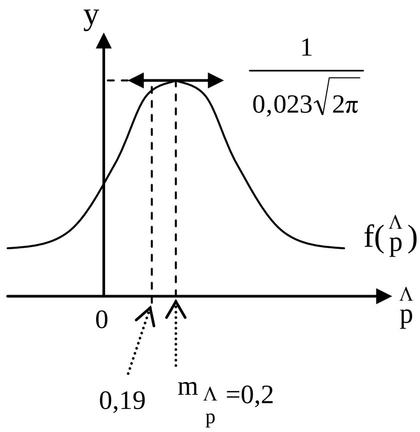
بما أن توزيع المعاينة لنسبة الأجهزة المعطوبة $\hat{p}$ يقترب من التوزيع الطبيعي، فيمكن تعريف دالة كثافته الاحتمالية كالتالي:

$$f(\hat{p}) = \frac{1}{\delta_{\hat{p}}\sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{p} - m_{\hat{p}}}{\delta_{\hat{p}}}\right)^2}$$

حيث $m_{\hat{p}}$ و $\sigma_{\hat{p}}$ يمثلان على التوالي المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة لنسبة الأجهزة المعطوبة $\hat{p}$.

وعليه، فإن الاحتمال المطلوب يُعرف كالتالي:

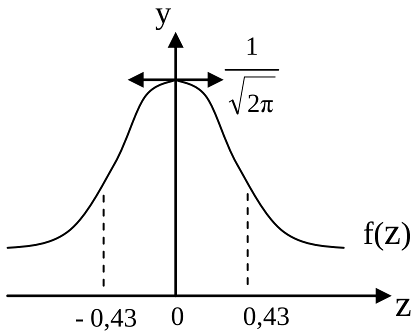
$$\Pr\;(\hat{p} > 0{,}19) = \int_{0{,}19}^{+\infty} \frac{1}{0{,}023\sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{p} - 0{,}2}{0{,}023}\right)^2} d\hat{p}$$



نضع: $z = \frac{\hat{p} - 0,2}{0,023}$، فيصبح:

$$dz = \frac{1}{0,023} d\hat{p} \Rightarrow d\hat{p} = 0,023 dz$$

$$\Pr(\hat{p} > 0,19) = \int_{\frac{0,19-0,2}{0,023}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \int_{-0,43}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$



من الشكل نلاحظ أن:

$$\Pr(\hat{p} > 0,19) = \int_{-\infty}^{0,43} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \Phi(0,43)$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ نجد:

$$\mathbf{\Pr(\hat{p} > 0,19) = 0,6664}$$

وهو احتمال أن تكون نسبة الأجهزة المعيبة تزيد عن 19%.

التمرين الرابع:

1- إيجاد احتمال أن تكون نسبة المصابين بتسوس في العينة أكبر من 35%:

حيث أن $0,05N = 0,05(200) = 10$ و$n = 80$، فإن $n > 0,05N$.

لا يمكن إهمال معامل التصحيح في صيغة حساب الانحراف المعياري $\sigma_{\hat{p}}$ وعلى ذلك فتوزيع المعاينة لنسبة المصابين بتسوس $\hat{p}$ يقترب من التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي x بوسط حسابي:

$$\mathbf{m_{\hat{p}}} = p = \mathbf{0,3}$$

وبانحراف معياري: $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\dfrac{pq}{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}} = \mathbf{0,03979}\ \sqrt{\dfrac{200-80}{200-1}}\sqrt{\dfrac{(0,3)(0,7)}{80}} =$.

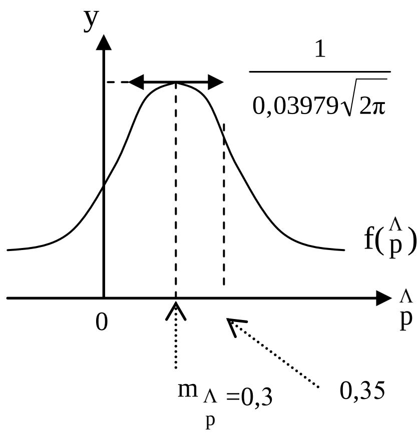
بما أن توزيع المعاينة لنسبة المصابين بتسوس $\hat{p}$ يقترب من التوزيع الطبيعي، فيمكن تعريف دالة كثافته الاحتمالية كالتالي:

$$f(\hat{p}) = \frac{1}{\delta_{\hat{p}}\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{p} - m_{\hat{p}}}{\delta_{\hat{p}}}\right)^2}$$

حيث $m_{\hat{p}}$ و $\sigma_{\hat{p}}$ يمثلان على التوالي المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة لنسبة المصابين بتسوس $\hat{p}$.

وعليه، فإن الاحتمال المطلوب يُعرف كالتالي:

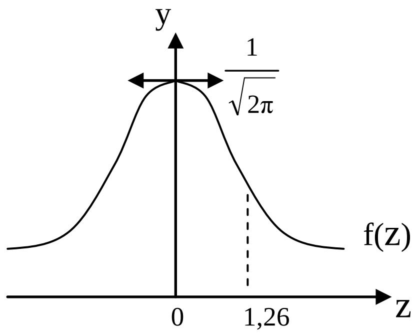
$$\Pr\ (\hat{p} > 0,35) = \int_{0,35}^{+\infty} \frac{1}{0,03979\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{p} - 0,3}{0,03979}\right)^2} d\hat{p}$$



نضع: $z = \dfrac{\hat{p} - 0,3}{0,03979}$، فيصبح:

$$dz = \frac{1}{0,03979} d\hat{p} \Rightarrow d\hat{p} = 0,03979dz$$

$$\Pr(\hat{p} > 0,35) = \int_{\frac{0,35-0,3}{0,03979}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \int_{1,26}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$



من الشكل نلاحظ أن:

$$\Pr(\hat{p} > 0,35) = 1 - \int_{-\infty}^{1,26} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \Phi(1,26)$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ نجد:

$$\mathbf{Pr}\ (\hat{p} > 0,35) = \mathbf{0,1038}$$

وهو احتمال أن تكون نسبة المصابين بتسوس في العينة أكبر من 35%.

سلسلة تمارين الأعمال الموجهة 4

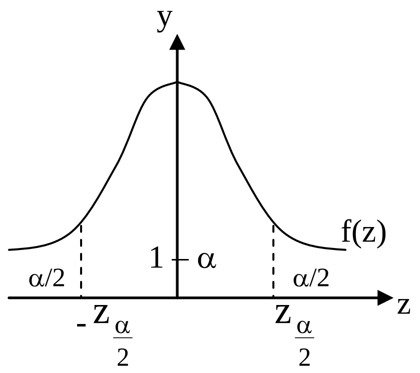
التمرين الأول:

– تقدير فترة الثقة 95% حول متوسط عمر المصابيح من إنتاج المصنع كلّه مع تفسير

النتيجة:

$\bar{x} = 1200$ $\quad n = 100 \quad 1 - \alpha = 0,95 \quad s = 250$

حيث أن الانحراف المعياري σ للمجتمع غير معلوم وحجم العينة كبير $n > 30$، فسوف نعتمد على جدول التوزيع الطبيعي المعياري لحساب القيمة المعيارية: $z_{\frac{\alpha}{2}}$.



لدينا: $\Pr(-z_{\frac{\alpha}{2}} \le z \le z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$

$$\int_{-z_{\frac{\alpha}{2}}}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1 - \alpha \Leftrightarrow \int_{0}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{1-\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \Phi(z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{1-\alpha}{2} + 0,5$$

$$\Phi(z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{0,95}{2} + 0,5 = 0,9750$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ نجد القيمة المعيارية: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$ التي نُعوضها في فترة الثقة حول الوسط الحسابي m مع استبدال الانحراف المعياري σ للمجتمع غير المعلوم بالانحراف المعياري s للعينة كالتالي:

$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$1200 - 1,96 \frac{250}{\sqrt{100}} \le m \le 1200 + 1,96 \frac{250}{\sqrt{100}}$$

$$1151 \le m \le 1249$$

أي أننا واثقين بنسبة 95% من أن الوسط الحسابي m للمجتمع المجهول موجود في هذه الفترة.

لو تم سحب 100 عينة عشوائية من هذا المجتمع حجم كلّ منها: $n = 10$، فإنه من المحتمل أن يكون هناك 95% من فترات الثقة تشتمل على متوسط المجتمع m وعليه تكون:

$$\Pr(1151 \le m \le 1249) = 0,95$$

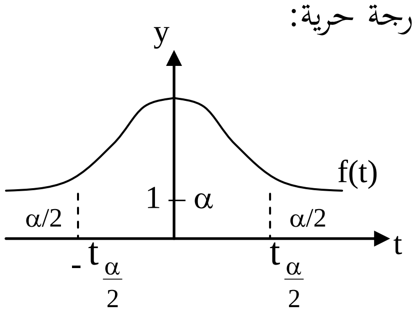
التمرين الثاني:

1- إيجاد فترة الثقة 95% حول متوسط وزن الدجاج في المزرعة مع تفسير النتيجة:

$$s = 200 \quad \bar{x} = 890 \quad n = 25 \quad 1 - \alpha = 0,95$$

حيث أن الانحراف المعياري σ للمجتمع غير معلوم وحجم العينة صغير $n \le 30$، فسوف

نعتمد على جدول توزيع ستودانت لحساب القيمة المعيارية: $t_{\frac{\alpha}{2}}$، بدرجة حرية:



$$\nu = n - 1 = 25 - 1 = 24$$

لدينا: $t_{\frac{\alpha}{2}}$ $\Pr(-t_{\frac{\alpha}{2}} \le t \le t_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$

وبالبحث في جدول توزيع ستودانت عند مستوى المعنوية $\alpha = 0,05$ ودرجة الحرية

$\nu = 24$ نجد القيمة المعيارية: $t_{\frac{\alpha}{2}} = 2,064$ التي نُعوضها في فترة الثقة حول الوسط الحسابي m

مع استبدال الانحراف المعياري δ للمجتمع غير المعلوم بالانحراف المعياري s للعينة كالتالي:

$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$250 - 2,064 \frac{200}{\sqrt{25}} \le m \le 250 + 2,064 \frac{200}{\sqrt{25}}$$

$$807,44 \le m \le 972,56$$

أي أننا واثقين بنسبة 95% من أن الوسط الحسابي m للمجتمع المجهول موجود في هذه الفترة.

لو تم سحب 100 عينة عشوائية من هذا المجتمع حجم كلّ منها: $n = 25$، فإنه من المحتمل

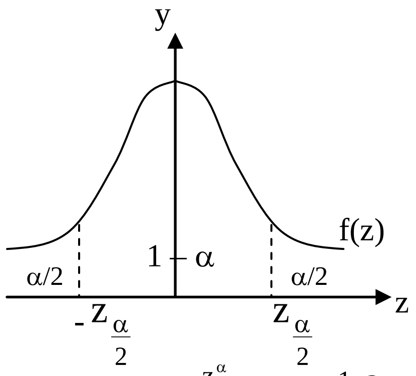
أن يكون هناك 95% من فترات الثقة تشتمل على متوسط المجتمع m وعليه تكون:

$$\Pr(807,44 \le m \le 972,56) = 0,95$$

2- إيجاد فترة الثقة 95% حول متوسط وزن الدجاج في المزرعة إذا عُلم من الخبرات السابقة أن تباين وزن الدجاج في المزرعة 62500 غرام، مع تفسير النتيجة:

$$\delta = 62500 \qquad \bar{x} = 890 \qquad n = 25 \qquad 1 - \alpha = 0{,}99$$

حيث أن الانحراف المعياري σ للمجتمع معلوم، فسوف نعتمد على جدول التوزيع الطبيعي



المعياري لحساب القيمة المعيارية: $z_{\frac{\alpha}{2}}$.

لدينا: $z_{\frac{\alpha}{2}}$ $\quad Pr(-z_{\frac{\alpha}{2}} \le z \le z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$

$$\int_{-z_{\frac{\alpha}{2}}}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1 - \alpha \Leftrightarrow \int_{0}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{1-\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \Phi(z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{1-\alpha}{2} + 0{,}5$$

$$\Phi(z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{0{,}99}{2} + 0{,}5 = 0{,}9950$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ نجد القيمة

المعيارية: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}58$ التي نُعوضها في فترة الثقة حول الوسط الحسابي m كالتالي:

$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\delta}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

$$890 - 2{,}58 \frac{250}{\sqrt{25}} \le m \le 890 + 2{,}58 \frac{250}{\sqrt{25}}$$

$$761 \le m \le 1019$$

أي أننا واثقين بنسبة 99% من أن الوسط الحسابي m للمجتمع المجهول موجود في هذه الفترة.

لو تم سحب 100 عينة عشوائية من هذا المجتمع حجم كلّ منها: $n = 25$، فإنه من المحتمل أن يكون هناك 99% من فترات الثقة تشتمل على متوسط المجتمع m وعليه تكون:

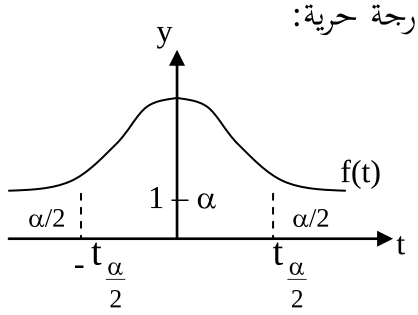
$$\Pr(761 \leq m \leq 1019) = 0,99$$

التمرين الثالث:

- إيجاد فترة الثقة 95% حول متوسط دخول الأفراد في هذه الدولة مع تفسير النتيجة:

$$s = 640 \quad \bar{x} = 7200 \quad n = 10 \quad 1 - \alpha = 0,95$$

حيث أن الانحراف المعياري σ للمجتمع غير معلوم وحجم العينة صغير $n \leq 30$، فسوف نعتمد على جدول توزيع ستودانت لحساب القيمة المعيارية: $t_{\frac{\alpha}{2}}$، بدرجة حرية:



$$\nu = n - 1 = 10 - 1 = 9$$

لدينا: $t_{\frac{\alpha}{2}}$: $\Pr(-t_{\frac{\alpha}{2}} \leq t \leq t_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$

وبالبحث في جدول توزيع ستودانت عند مستوى المعنوية $\alpha = 0,05$ ودرجة الحرية $\nu = 9$ نجد القيمة المعيارية: $t_{\frac{\alpha}{2}} = 2,262$ التي نُعوضها في فترة الثقة حول الوسط الحسابي m مع استبدال الانحراف المعياري σ للمجتمع غير المعلوم بالانحراف المعياري s للعينة كالتالي:

$$\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$7200 - 2,262 \frac{640}{\sqrt{10}} \leq m \leq 7200 + 2,262 \frac{640}{\sqrt{10}}$$

$$6741,87 \leq m \leq 7658,13$$

أي أننا واثقين بنسبة 95% من أن الوسط الحسابي m للمجتمع المجهول موجود في هذه الفترة.

لو تم سحب 100 عينة عشوائية من هذا المجتمع حجم كلّ منها: $n = 10$، فإنه من المحتمل أن يكون هناك 95% من فترات الثقة تشتمل على متوسط المجتمع m وعليه تكون:

$$\Pr(6741,87 \leq m \leq 7658,13) = 0,95$$

التمرين الرابع:

اختبار فرضية أن متوسط الزيادة في أجور العاملين في المؤسسة عام 2011 قد اختلف عن متوسط الزيادة في الأجور عام 2008 وذلك عند مستوى معنوية 5%:

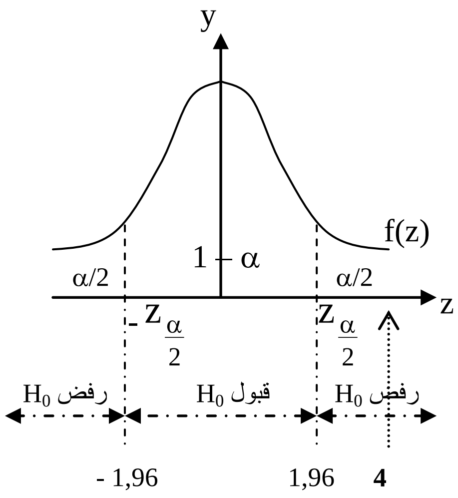
$$s = 800 \quad m_0 = 3600 \quad \bar{x} = 4000 \quad n = 64 \quad \alpha = 0,05$$

1– صياغة الفرضيات: $H_0 : m = 3600$

$H_1 : m \neq 3600$

2– تحديد مناطق الرفض والقبول:

حيث أن الانحراف المعياري σ للمجتمع غير معلوم وحجم العينة كبير n>30، فسوف نعتمد على جدول التوزيع الطبيعي المعياري لحساب القيمة المعيارية: $z_{\frac{\alpha}{2}}$.



لدينا: $z_{\frac{\alpha}{2}}$ $\qquad \Pr(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$

$$\int_{-z_{\frac{\alpha}{2}}}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1 - \alpha \Leftrightarrow \int_{0}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{1-\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \Phi(z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{1-\alpha}{2} + 0,5$$

$$\Phi(z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{0,95}{2} + 0,5 = 0,9750$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ نجد القيمة المعيارية: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$.

3– حساب إحصاءة الاختبار: $z = \frac{\bar{x} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{4000 - 3600}{\frac{800}{\sqrt{64}}} = 4$

4– اتخاذ القرار:

نلاحظ أن قيمة إحصاءة الاختبار 4 تقع في منطقة الرفض لـ: H_0 وعليه نرفض فرضية العدم بأن متوسط الزيادة في الأجور عام 2011 قد اختلف عن متوسط الزيادة في الأجور عام 2008 بمستوى معنوية 5%.

التمرين الخامس:

– اختبار فرضية أن هناك عيباً بالإنتاج مما أدى إلى انخفاض متوسط وزن العبوة وذلك عند مستوى معنوية 5%:

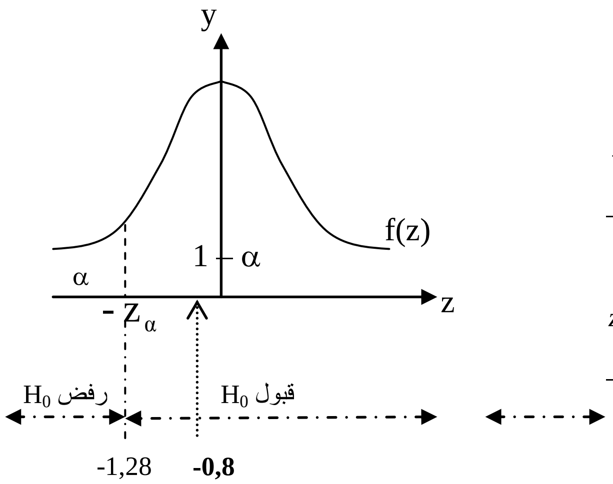
$$\delta = 18 \quad m_0 = 240 \quad \bar{x} = 235 \quad n = 9 \quad \alpha = 0,1$$

1– صياغة الفرضيات: $H_0 : m = 240$

$H_1 : m < 240$

2– تحديد مناطق الرفض والقبول:

حيث أن الانحراف المعياري σ للمجتمع معلوم، فسوف نعتمد على جدول التوزيع الطبيعي المعياري لحساب القيمة المعيارية: Z_α.



لدينا: $Pr(z \geq -z_\alpha) = 1 - \alpha$

$$\int_{-z\alpha}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1 - \alpha$$

$$\int_{-\infty}^{z\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1 - \alpha$$

$$\Phi(z_\alpha) = 0,9000$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ نجد القيمة المعيارية: $z_\alpha = 1,28$.

3– حساب إحصاءة الاختبار: $z = \dfrac{\bar{x} - m}{\dfrac{\delta}{\sqrt{n}}} = \dfrac{235 - 240}{\dfrac{18}{\sqrt{9}}} = -0,83$

4– اتخاذ القرار:

نلاحظ أن قيمة إحصاءة الاختبار 0,83 – تقع في منطقة القبول لـ: H_0 وعليه نقبل فرضية العدم بأن متوسط وزن العبوة يساوي 240 غرام بمستوى معنوية 10%.

وفيما يلي امتحانات السداسي الأول في مقياس الإحصاء 03 لطلبة السنة الثانية ليسانس في العلوم الاقتصادية، العلوم التجارية وعلوم التسيير:

الجمهوريــة الجزائريــة الديمقراطيــة الشعبيــة

جامعة ابن خلدون - تيارت

2ème Année LMD

2015 - 2014

كلّية العلوم الاقتصادية، العلوم التجارية وعلوم التسيير

-o- امتحان السداسي الأول في مقياس الإحصاء 03 -o-

التمرين الأول:

نختار عينة من الأجور الشهرية لعمال الشركة A ونختار عينة أخرى من الأجور الشهرية لعمال الشركة B؛

1- أوجد توزيع المعاينة للفرق بين متوسط الأجور الشهرية المدفوعة من قبل الشركة A ومتوسط الأجور الشهرية المدفوعة من قبل الشركة B، إذا علمت أن:

- احتمال أن يكون الفرق بين متوسط الأجور الشهرية المدفوعة من قبل الشركة A ومتوسط الأجور الشهرية المدفوعة من قبل الشركة B أقل من 8950 دينار يساوي: 0,0014.

- احتمال أن يكون الفرق بين متوسط الأجور الشهرية المدفوعة من قبل الشركة A ومتوسط الأجور الشهرية المدفوعة من قبل الشركة B محصور بين: 8950 و10700 دينار يساوي: 0,9758.

2- أحسب حجم العينة المختارة من الأجور الشهرية لعمال الشركة B، إذا علمت أن:

- حجم العينة المختارة من الأجور الشهرية لعمال الشركة A يساوي 36 أجراً.

- الانحراف المعياري للأجور الشهرية لعمال الشركتين A وB على التوالي 600 دينار و3000 دينار.

ملاحظة:

المتغير العشوائي الذي يُقترن بأجور العمال الشهرية في هذين الشركتين يخضع لقانون التوزيع الطبيعي.

أعطي من جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt = 0{,}4772 \qquad \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt = 0{,}4986$$

التمرين الثاني:

عينة عشوائية حجمها: $n = 16$ أُختيرت من الدخول الأسبوعية لأفراد دولة ما؛

1- إذا كان الوسط الحسابي والانحراف المعياري لدخول الأفراد الأسبوعية في هذه العينة هما على التوالي: 5500 دينار و650 دينار، فأوجد فترة الثقة 95% حول الوسط الحسابي لدخول الأفراد الأسبوعية في هذه الدولة مع تفسير النتيجة.

2- إذا عُلم الانحراف المعياري لدخول الأفراد الأسبوعية في هذه الدولة وقُدر بـ: 800 دينار، فكيف يمكن اختبار فرضية العدم بأن متوسط الدخول الأسبوعية لأفراد هذه الدولة يساوي 5000 دينار، مقابل الفرضية البديلة أن هذا المتوسط يكون أكبر من 5000 دينار؟ وذلك عند مستوى معنوية 5%.

ملاحظة:

المتغير العشوائي الذي يُقترن بدخول الأفراد الأسبوعية في هذه الدولة يخضع لقانون التوزيع الطبيعي.

أعطي من جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

$$\int_{-\infty}^{1,645} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \, dt = 0,9500$$

أعطي من جدول توزيع ستودانت:

عندما يكون مستوى المعنوية: $\alpha = 0,05$ ودرجة الحرية: $\nu = 15$، تكون: $t = 2,131$

مدة الامتحان: ساعة ونصف
يسمح باستعمال الآلة الحاسبة العلمية
لا يسمح باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري وجدول توزيع ستودانت.

بالتوفيق

التمرين الأول:

1- إيجاد توزيع المعاينة للفرق بين المتوسطين:

ليكن متغير عشوائي يُقترن بالأجور الشهرية المدفوعة من قبل الشركتين A وB.

بما أن توزيع المعاينة للفرق بين الوسطين $\bar{x}_A - \bar{x}_B$ يقترب من التوزيع الطبيعي، فيمكن تعريف دالة كثافته الاحتمالية كالتالي:

$$f(\bar{x}_A-\bar{x}_B) = \frac{1}{\sigma_{\bar{x}_A - \bar{x}_B}\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(\bar{x}_A-\bar{x}_B)-m_{\bar{x}_A - \bar{x}_B}}{\delta_{\bar{x}_A - \bar{x}_B}}\right]^2}$$

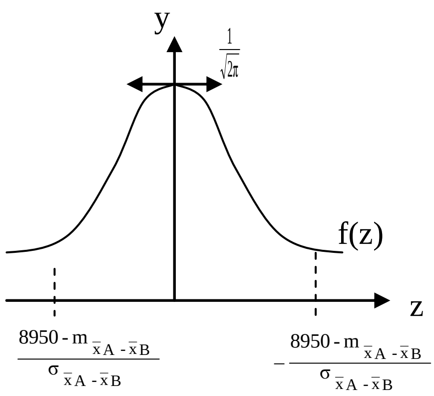
حيث $m_{\bar{x}_A - \bar{x}_B}$ و $\sigma_{\bar{x}_A - \bar{x}_B}$ يمثلان على التوالي المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للفرق بين الوسطين $\bar{x}_A - \bar{x}_B$.

لدينا: $$Pr[(\bar{x}_A-\bar{x}_B) < 8950] = 0,0014$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{8940} f(\bar{x}_A - \bar{x}_B)\,d(\bar{x}_A - \bar{x}_B) = 0,0014$$

نضع: $z = \frac{(\bar{x}_A-\bar{x}_B)-m_{\bar{x}_A - \bar{x}_B}}{\sigma_{\bar{x}_A - \bar{x}_B}}$، فيصبح:

$$\int_{-\infty}^{\frac{8950 - m_{\bar{x}_A - \bar{x}_B}}{\sigma_{\bar{x}_A - \bar{x}_B}}} f(z)dz = 0,0014$$



من الشكل نلاحظ أن: $$\int_{-\frac{8950 - m_{\bar{x}_A - \bar{x}_B}}{\sigma_{\bar{x}_A - \bar{x}_B}}}^{+\infty} f(z)dz = 0,0014$$

$$\Leftrightarrow\ 0,5 - \int_0^{-\frac{8950-m_{\bar{x}_A-\bar{x}_B}}{\sigma_{\bar{x}_A-\bar{x}_B}}} f(z)dz = 0,0014$$

$$\Rightarrow \int_0^{-\frac{8950-m_{\bar{x}_A-\bar{x}_B}}{\sigma_{\bar{x}_A-\bar{x}_B}}} f(z)dz = 0,4986$$

وحسب معطيات جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $\int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$ نجد:

$$-\frac{8950-m_{\bar{x}_A-\bar{x}_B}}{\sigma_{\bar{x}_A-\bar{x}_B}} = 3$$

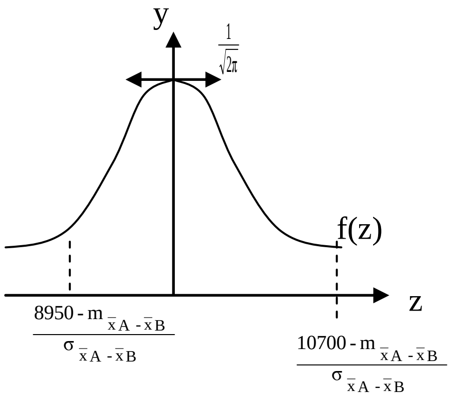
$$\Leftrightarrow\ -8950 + m_{\bar{x}_A-\bar{x}_B} = 3\sigma_{\bar{x}_A-\bar{x}_B} \ldots\ldots\ldots\ldots ①$$

ولدينا: $\Pr[10700 > (\bar{x}_B - \bar{x}_A) > 8950] = 0,9758$

$$\Leftrightarrow \int_{8950}^{10700} f(\bar{x}_A-\bar{x}_B)d(\bar{x}_A-\bar{x}_B) = 0,9758$$

نضع: $z = \frac{(\bar{x}_A-\bar{x}_B)-m_{\bar{x}_A-\bar{x}_B}}{\sigma_{\bar{x}_A-\bar{x}_B}}$ ، فيصبح:

$$\int_{\frac{8950-m_{\bar{x}_A-\bar{x}_B}}{\sigma_{\bar{x}_A-\bar{x}_B}}}^{\frac{10700-m_{\bar{x}_A-\bar{x}_B}}{\sigma_{\bar{x}_A-\bar{x}_B}}} f(z)dz = 0,9758$$



من الشكل نلاحظ أن:

$$\int_{-\infty}^{\frac{10700-m_{\bar{x}A-\bar{x}B}}{\sigma_{\bar{x}A-\bar{x}B}}} f(z)dz - \int_{-\infty}^{\frac{8950-m_{\bar{x}A-\bar{x}B}}{\sigma_{\bar{x}A-\bar{x}B}}} f(z)dz = 0,9758$$

بالتعويض:

$$\int_{-\infty}^{\frac{10700-m_{\bar{x}A-\bar{x}B}}{\sigma_{\bar{x}A-\bar{x}B}}} f(z)dz - 0,0014 = 0,9758$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\frac{10700-m_{\bar{x}A-\bar{x}B}}{\sigma_{\bar{x}A-\bar{x}B}}} f(z)dz = 0,9772$$

$$\Leftrightarrow \int_{0}^{\frac{10700-m_{\bar{x}A-\bar{x}B}}{\sigma_{\bar{x}A-\bar{x}B}}} f(z)dz = 0,4772$$

وحسب معطيات جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $\int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ نجد:

$$\frac{10700-m_{\bar{x}A-\bar{x}B}}{\sigma_{\bar{x}A-\bar{x}B}} = 2$$

$$\Leftrightarrow 10700 - m_{\bar{x}A-\bar{x}B} = 2\sigma_{\bar{x}A-\bar{x}B} \ldots\ldots\ldots\ldots ②$$

بجمع طرفي المعادلة ① مع طرفي المعادلة ②، نحصل على:

$$\Leftrightarrow 1750 = 5\sigma_{\bar{x}A-\bar{x}B}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\sigma_{\bar{x}A-\bar{x}B} = 350}$$

ومنه، فإن: $m_{\bar{x}A-\bar{x}B} = 8950 + 3(350)$

$$\Rightarrow \boldsymbol{m_{\bar{x}A-\bar{x}B} = 10000}$$

وعليه، فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسط الأجور الشهرية المدفوعة من قبل الشركة A ومتوسط الأجور الشهرية المدفوعة من قبل الشركة B يقترب من التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي بوسط حسابي: $\mathbf{m_{\bar{x}A - \bar{x}B}} = m_A - m_B = \mathbf{10000}$ وبانحراف معياري: $\boldsymbol{\sigma_{\bar{x}A - \bar{x}B} = 350}$.

2- حساب حجم العينة المختارة من الأجور الشهرية لعمال الشركة B:

ليكن n_A وn_B على التوالي الأجور الشهرية لعمال الشركة A والأجور الشهرية لعمال الشركة B؛

وليكن σ_A وσ_B على التوالي الانحراف المعياري للأجور الشهرية لعمال الشركة A والانحراف المعياري للأجور الشهرية لعمال الشركة B.

لدينا: $\sigma_{\bar{x}A - \bar{x}B} = \sqrt{\dfrac{\sigma_A^2}{n_A} + \dfrac{\sigma_B^2}{n_B}}$

لدينا: $350 = \sqrt{\dfrac{600^2}{3} + \dfrac{3000^2}{n_B}}$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{n_B = 80}$$

وهو حجم العينة المختارة من الأجور الشهرية لعمال الشركة B.

<u>**التمرين الثاني:**</u>

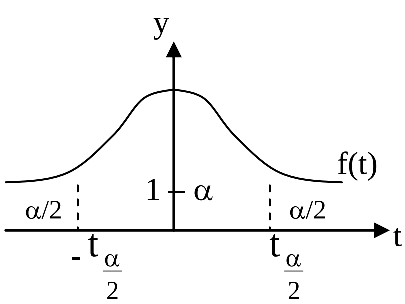
1- إيجاد فترة الثقة 95% حول الوسط الحسابي m لدخول الأفراد في هذه الدولة:

$$\bar{x} = 5500 \quad n = 16 \quad 1 - \alpha = 0{,}95 \quad s = 650$$

حيث أن الانحراف المعياري σ للمجتمع غير معلوم وحجم العينة صغير $n \leq 30$، فسوف نعتمد على جدول توزيع ستودانت لحساب القيمة المعيارية: $t_{\frac{\alpha}{2}}$، بدرجة حرية:

$$\nu = n - 1 = 16 - 1 = 15$$

لدينا: $t_{\frac{\alpha}{2}}$ $\quad \Pr(-t_{\frac{\alpha}{2}} \leq t \leq t_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$



وحسب معطيات جدول توزيع ستودانت عند مستوى المعنوية $\alpha = 0{,}05$ ودرجة الحرية $\nu = 15$ نجد القيمة المعيارية $t_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}753$ التي نُعوضها في فترة الثقة حول الوسط الحسابي m مع استبدال الانحراف المعياري σ للمجتمع غير المعلوم بالانحراف المعياري s للعينة كالتالي:

$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$5500 - 1{,}753 \frac{650}{\sqrt{16}} \leq m \leq 5500 + 1{,}753 \frac{650}{\sqrt{16}}$$

$$5215{,}1375 \leq m \leq 5784{,}8625$$

أي أننا واثقين بنسبة 95% من أن الوسط الحسابي m للمجتمع المجهول موجود في هذه الفترة.

لو تم سحب 100 عينة عشوائية من هذا المجتمع حجم كلّ منها: $n = 16$، فإنه من المحتمل أن يكون هناك 95% من فترات الثقة تشتمل على متوسط المجتمع m وعليه تكون:

$$Pr(5215{,}1375 \leq m \leq 5784{,}8625) = 0{,}95$$

2– اختبار فرضية العدم بأن متوسط الدخول الأسبوعية لأفراد هذه الدولة يساوي 5000 دينار، مقابل الفرضية البديلة أن هذا المتوسط يكون أكبر من 5000 دينار وذلك عند مستوى معنوية 5%:

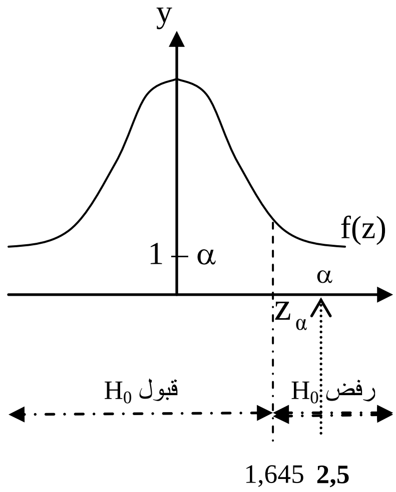
$\sigma = 800 \quad m_0 = 5000 \quad \bar{x} = 5500 \quad n = 16 \quad \alpha = 0{,}05$

1– صياغة الفرضيات: $H_0 : m = 5000$

$H_1 : m < 5000$

2– تحديد مناطق الرفض والقبول:

حيث أن الانحراف المعياري σ للمجتمع معلوم، فسوف نعتمد على جدول التوزيع الطبيعي المعياري لحساب القيمة المعيارية: Z_α.



لدينا: $\Pr(z \le z_\alpha) = 1 - \alpha$

$$\int_{-\infty}^{z\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1 - \alpha$$

$$\Phi(z_\alpha) = 0,9500$$

وحسب معطيات جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$

نجد القيمة المعيارية: $Z_\alpha = 1,645$.

3– حساب إحصاءة الاختبار: $z = \dfrac{\bar{x} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \dfrac{5500 - 5000}{\frac{800}{\sqrt{16}}} = 2,5$

4– اتخاذ القرار:

نلاحظ أن قيمة إحصاءة الاختبار 2,5 تقع في منطقة الرفض لـ: H_0 وعليه نرفض فرضية العدم بأن متوسط الدخول الأسبوعية لأفراد هذه الدولة يساوي 5000 دينار ونقبل الفرضية البديلة بأن هذا المتوسط يكون أكبر من 5000 دينار بمستوى معنوية 5%.

الجمهوريــة الجزائريــة الديمقراطيــة الشعبيــة

جامعة ابن خلدون - تيارت

2ème Année LMD

2015 - 2016

كلّية العلوم الاقتصادية، العلوم التجارية وعلوم التسيير

-o- امتحان السداسي الأول في مقياس الإحصاء 03 -o-

مدة الامتحان: ساعة ونصف

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة العلمية

لا يسمح باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري وجدول توزيع ستودانت.

التمرين الأول:

تصنع آلة منتجات معينة؛

تحصل زبون على صندوق به عدد من الوحدات من منتجات هذه الآلة.

1- أحسب نسبة الوحدات المنتجة المعيبة من هذه الآلة، إذا علمت أن:

احتمال وجود أقل من 40% من الوحدات المعيبة المنتجة داخل هذا الصندوق يساوي 0,5.

2- أحسب عدد الوحدات المنتجة من هذه الآلة والموجودة داخل صندوق هذا الزبون، إذا علمت أن:

توزيع المعاينة لنسبة الوحدات المنتجة المعيبة $\hat{p}$ يقترب من التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي x

الذي يُقترن بعدد الوحدات المنتجة المعيبة، بانحراف معياري:. $\sigma_{\hat{p}} = 0,02$

ملاحظة:

المتغير العشوائي الذي يُقترن بعدد الوحدات المنتجة من هذه الآلة يخضع لقانون التوزيع الطبيعي.

التمرين الثاني:

أ- ليكن لدينا مجال الثقة حول الوسط الحسابي m لمجتمع طبيعي معطى كالتالي:

$$29,35 \leq m \leq 32,65$$

1- أوجد الوسط الحسابي $\bar{x}$ للعينة المسحوبة من ذلك المجتمع وهامش الخطأ ME.

2- أوجد حجم العينة n المسحوبة من ذلك المجتمع، إذا علمت أن درجة الثقة حول الوسط الحسابي $1 - \alpha$ والانحراف المعياري σ لذلك المجتمع يساويان على التوالي: 90,10% و4.

ب- عينة عشوائية حجمها 9 أشخاص أُختيرت من الدخول الأسبوعية لأفراد دولة ما؛

- إذا كان الوسط الحسابي والانحراف المعياري لدخول الأفراد الأسبوعية في هذه العينة هما على التوالي: 7500 دينار و500 دينار، فكيف يمكن اختبار فرضية العدم بأن متوسط الدخول الأسبوعية لأفراد هذه الدولة يساوي 7200 دينار، مقابل الفرضية البديلة أن هذا المتوسط لا يساوي 7200 دينار؟ وذلك عند مستوى معنوية 9,9%.

ملاحظة: المتغير العشوائي الذي يُقترن بدخول الأفراد الأسبوعية في هذه الدولة يخضع لقانون التوزيع الطبيعي.

أعطي من جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

$$\int_0^{1,650} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,4505$$

أعطي من جدول توزيع ستودانت:

عندما يكون مستوى المعنوية: $\alpha = 0,099$ ودرجة الحرية: $\nu = 8$، تكون: $t_{\frac{\alpha}{2}} = 2,896$

حلّ امتحان السداسي الأول في مقياس الإحصاء 03 للسنة الجامعية 2015 - 2016

التمرين الأول:

1- حساب نسبة الوحدات المنتجة المعيبة من هذه الآلة:

بما أن توزيع المعاينة لنسبة الوحدات المنتجة المعيبة $\hat{p}$ يقترب من التوزيع الطبيعي، فيمكن تعريف دالة كثافته الاحتمالية كالتالي:

$$f(\hat{p}) = \frac{1}{\delta_{\hat{p}}\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{p}-m_{\hat{p}}}{\delta_{\hat{p}}}\right)^2}$$

حيث $m_{\hat{p}}$ و $\delta_{\hat{p}}$ يمثلان على التوالي المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة لنسبة الوحدات المنتجة المعيبة $\hat{p}$.

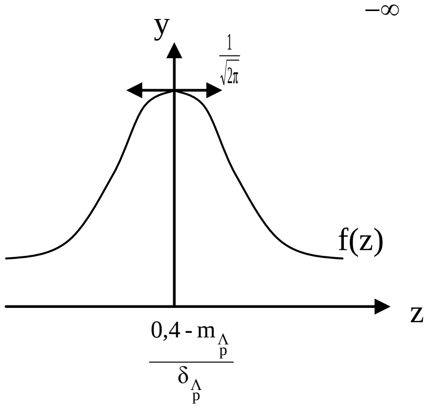
لدينا: احتمال وجود أقل من 40% من الوحدات المنتجة المعيبة داخل الصندوق يساوي 0,5.

أي أن: $\Pr(\hat{p} < 0{,}4) = 0{,}5$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0,4} f(\hat{p})\,d\hat{p} = 0{,}5$$

نضع: $z = \dfrac{0{,}4 - m_{\hat{p}}}{\delta_{\hat{p}}}$، فيصبح:

$$\int_{-\infty}^{\frac{0,4-m_{\hat{p}}}{\delta_{\hat{p}}}} f(z)\,dz = 0{,}5$$



من الشكل نلاحظ أن: $\dfrac{0{,}4 - m_{\hat{p}}}{\delta_{\hat{p}}} = 0$

$$\Leftrightarrow 0,4 - m_{\hat{p}} = 0 \Rightarrow m_{\hat{p}} = 0,4$$

بما أن توزيع المعاينة لنسبة الوحدات المنتجة المعيبة $\hat{p}$ يقترب من التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي x الذي يُقترن بعدد الوحدات المنتجة المعيبة بوسط حسابي: $m_{\hat{p}} = 0,4$، فإن **p = 0,4** هي نسبة الوحدات المنتجة المعيبة من هذه الآلة.

2- حساب عدد الوحدات المنتجة من هذه الآلة والموجودة داخل صندوق هذا الزبون:

توزيع المعاينة لنسبة الوحدات المنتجة المعيبة $\hat{p}$ يقترب من التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي x الذي يُقترن بعدد الوحدات المنتجة المعيبة، بانحراف معياري: $\sigma_{\hat{p}} = 0,02$.

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0,02$$

بالتعويض: $\sqrt{\frac{0,4(1-0,6)}{n}} = 0,02$

$$\Leftrightarrow \frac{0,24}{n} = 0,0004 \Rightarrow \mathbf{n = 600}$$

وهو عدد الوحدات المنتجة من هذه الآلة والموجودة داخل صندوق هذا الزبون.

التمرين الثاني:

أ- 1- إيجاد الوسط الحسابي $\bar{x}$ للعينة المسحوبة من ذلك المجتمع وهامش الخطأ ME:

لدينا مجال الثقة حول الوسط الحسابي m لمجتمع طبيعي معطى كالتالي:

$$29,35 \le m \le 32,65$$

وهذا يعني أن:

$$29,35 = \bar{x} - ME \ldots\ldots\ldots ①$$

$$32,65 = \bar{x} + ME \ldots\ldots\ldots ②$$

حيث $\bar{x}$ يمثل الوسط الحسابي للعينة المسحوبة من ذلك المجتمع وME يمثل هامش الخطأ.

بجمع المعادلتين ① و②، نحصل على:

$$62 = 2\bar{x} \Rightarrow \bar{x} = \mathbf{31}$$

وهو الوسط الحسابي للعينة المسحوبة من ذلك المجتمع.

بالتعويض في المعادلة رقم ① نحصل على:

$$29,35 = 31 - ME$$

$$\Rightarrow ME = 31 - 29,35$$

$$\mathbf{ME = 1,65}$$

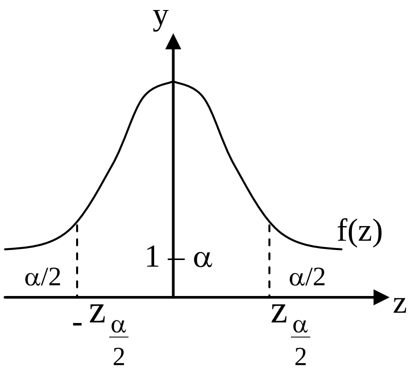
وهو هامش الخطأ.

-2 أوجد حجم العينة n المسحوبة من ذلك المجتمع، إذا علمت أن درجة الثقة حول الوسط الحسابي 1 - α والانحراف المعياري σ لذلك المجتمع يساويان على التوالي: 90,10% و4.

أ- 2- إيجاد حجم العينة n المسحوبة من ذلك المجتمع:

حيث أن الانحراف المعياري σ للمجتمع معلوم، فسوف نعتمد على جدول التوزيع الطبيعي المعياري لحساب القيمة المعيارية: $z_{\frac{\alpha}{2}}$.

لدينا: $Pr(-z_{\frac{\alpha}{2}} \le z \le z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$



$$\int_{-z_{\frac{\alpha}{2}}}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1 - \alpha \Leftrightarrow \int_{0}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{1-\alpha}{2}$$

$$\int_{0}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{0,901}{2} = 0,4505$$

وحسب معطيات جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $\int_{0}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ نجد القيمة المعيارية: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,65$.

لدينا هامش الخطأ: $ME = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

بالتعويض: $1,65 = 1,65 \frac{4}{\sqrt{n}}$

$$1 = \frac{4}{\sqrt{n}} \Rightarrow \mathbf{n = 16}$$

وهو حجم العينة حجم العينة n المسحوبة من ذلك المجتمع.

ب– اختبار فرضية أن متوسط الدخول الأسبوعية لأفراد هذه الدولة يساوي 7200 دينار مقابل الفرضية البديلة أن هذا المتوسط لا يساوي 7200 دينار وذلك عند مستوى معنوية 5%:

الحلّ: $s = 500$ $m_0 = 7200$ $\bar{x} = 7500$ $n = 9$ $\alpha = 0,099$

1– صياغة الفرضيات: $H_0 : m = 7200$

$H_1 : m \neq 7200$

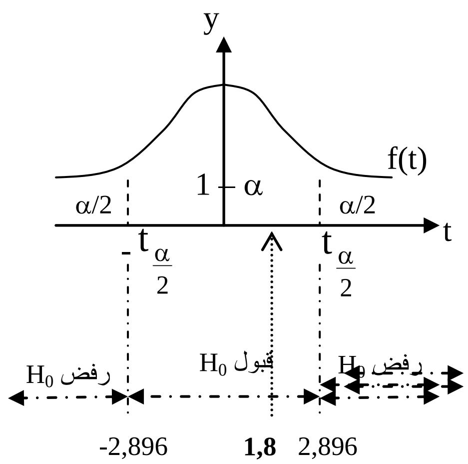
2– تحديد مناطق الرفض والقبول:

حيث أن الانحراف المعياري σ للمجتمع غير معلوم وحجم العينة صغير n≤30، فسوف نعتمد

على جدول توزيع ستودانت لحساب القيمة المعيارية: $t_{\frac{\alpha}{2}}$ ، بدرجة حرية:

$$\nu = n - 1 = 9 - 1 = 8$$

لدينا: $t_{\frac{\alpha}{2}}$ $Pr(-t_{\frac{\alpha}{2}} \le t \le t_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$



وحسب معطيات جدول توزيع ستودانت عند مستوى المعنوية $\alpha = 0,099$ ودرجة الحرية $\nu = 8$ نجد القيمة المعيارية $t_{\frac{\alpha}{2}} = 2,896$.

3– حساب إحصاءة الاختبار: $t = \dfrac{\bar{x} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \dfrac{7500 - 7200}{\frac{500}{\sqrt{9}}} = 1,8$

4– اتخاذ القرار:

نلاحظ أن قيمة إحصاءة الاختبار 1,8 تقع في منطقة القبول لـ: H_0 وعليه نقبل فرضية العدم بأن متوسط الدخول الأسبوعية لأفراد هذه الدولة يساوي 7200 دينار بمستوى معنوية 5%.

-o- امتحان السداسي الأول في مقياس الإحصاء 03 -o-

التمرين الأول:

نختار عينة من بطاريات سيارة من إنتاج المصنع A ونختار عينة أخرى تمثل ضعف العينة السابقة من نفس البطاريات من إنتاج المصنع B لها متوسط عمر 2,4 سنة؛

1- أوجد متوسط عمر العينة المختارة من بطاريات السيارة من إنتاج المصنع A، إذا علمت أن:

- احتمال أن يكون الفرق بين متوسط عمر البطاريات المنتجة من قبل المصنع A ومتوسط عمر البطاريات المنتجة من قبل المصنع B أكبر من 0,145 سنة يساوي: 0,0668.
- توزيع المعاينة للفرق بين متوسط عمر البطاريات المنتجة من قبل المصنع A ومتوسط عمر البطاريات المنتجة من قبل المصنع B يقترب من التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي الذي يُقترن بعمر البطاريات، بانحراف معياري يقدر بـ: 1,2% من متوسط عمر البطاريات للعينة المختارة من إنتاج المصنع A.

2- أوجد توزيع المعاينة للفرق بين متوسط عمر البطاريات المنتجة من قبل المصنع A ومتوسط عمر البطاريات المنتجة من قبل المصنع B،

3- أحسب حجم العينة المختارة من بطاريات المصنع A وحجم العينة المختارة من بطاريات المصنع B، إذا علمت أن:

- الانحراف المعياري لعمر البطاريات للعينة المختارة من إنتاج المصنع A يساوي شهرين و12 يوماً.
- الانحراف المعياري لعمر البطاريات للعينة المختارة من إنتاج المصنع B يساوي شهر و6 أيام.

أعطى من جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

$$\int_0^{1,5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,4332$$

التمرين الثاني:

أ- مصنع لإنتاج المصابيح، أُختير من إنتاجه عينة حجمها 225 مصباح.

بعد عملية التقدير بفترة ثقة 93,12% وجدنا أن المتوسط الحسابي m لعمر المصابيح من إنتاج المصنع كله كان محصوراً بين 1836,4 و1763,6 ساعة.

- أوجد الوسط الحسابي $\bar{x}$ لعمر المصباح وانحرافه المعياري s لهذه العينة المختارة.

ملاحظة: المتغير العشوائي الذي يُقترن بعدد المصابيح من إنتاج المصنع يخضع لقانون التوزيع الطبيعي.

أعطي من جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

$$\int_{1,82}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,0344$$

ب- من المعلوم أن أحد أدوية إزالة الألم المستخدمة يمكنها إزالة الألم للمريض في فترة زمنية متوسطها 2,9 دقيقة. ولمقارنة هذا الدواء بدواء جديد لإزالة الألم، أُختيرت عينة عشوائية من 25 مريضاً وتم إعطاء الدواء لهم فكان المتوسط الحسابي لطول فترة إزالة الألم في هذه العينة 2,3 دقيقة بانحراف معياري 1,4 دقيقة.

هل تدل هذه النتائج على أن الدواء الجديد أفضل من الدواء القديم من حيث الفترة اللازمة لإزالة الألم؟ وذلك عند مستوى معنوية 5%.

أعطي من جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

$$\int_{-\infty}^{1,96} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,9750$$

أعطي من جدول توزيع ستودانت:

عندما يكون مستوى المعنوية: $\alpha = 0,05$ ودرجة الحرية: $\nu = 24$، تكون: $t_\alpha = 1,711$

مدة الامتحان: ساعة ونصف يسمح باستعمال الآلة الحاسبة العلمية لا يسمح باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري وجدول توزيع ستودانت.

التمرين الأول:

1- إيجاد متوسط عمر العينة المختارة من بطاريات السيارة من إنتاج المصنع A:

ليكن متغير عشوائي يُقترن بعمر البطاريات المنتجة من قبل المصنعين A وB.

بما أن توزيع المعاينة للفرق بين الوسطين $\bar{x}_A - \bar{x}_B$ يقترب من التوزيع الطبيعي، فيمكن تعريف دالة كثافته الاحتمالية كالتالي:

$$f(\bar{x}_A - \bar{x}_B) = \frac{1}{\sigma_{\bar{x}_A - \bar{x}_B}\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(\bar{x}_A - \bar{x}_B) - m_{\bar{x}_A - \bar{x}_B}}{\sigma_{\bar{x}_A - \bar{x}_B}}\right]^2}$$

حيث $m_{\bar{x}_A - \bar{x}_B}$ و $\sigma_{\bar{x}_A - \bar{x}_B}$ يمثلان على التوالي المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للفرق بين الوسطين $\bar{x}_A - \bar{x}_B$.

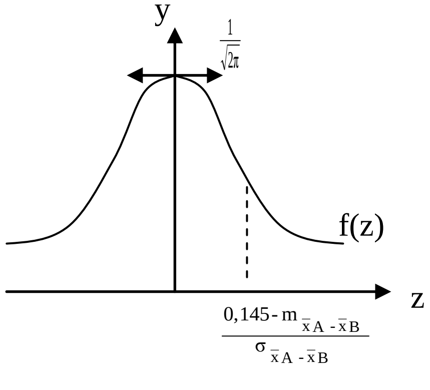
لدينا:

$$\Pr[(\bar{x}_A - \bar{x}_B) > 0,145] = 0,0668$$

$$\Leftrightarrow \int_{0,145}^{+\infty} f(\bar{x}_A - \bar{x}_B)\, d(\bar{x}_A - \bar{x}_B) = 0,0668$$

نضع: $z = \frac{(\bar{x}_A - \bar{x}_B) - m_{\bar{x}_A - \bar{x}_B}}{\sigma_{\bar{x}_A - \bar{x}_B}}$، فيصبح:

$$\int_{\frac{0,145 - m_{\bar{x}_A - \bar{x}_B}}{\sigma_{\bar{x}_A - \bar{x}_B}}}^{+\infty} f(z)\,dz = 0,0668$$



من الشكل نلاحظ أن: $\int_{\frac{0,145-m_{\bar{x}A-\bar{x}B}}{\sigma_{\bar{x}A-\bar{x}B}}}^{+\infty} f(z)dz = 0,0668$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \int_{-\infty}^{\frac{0,145-m_{\bar{x}A-\bar{x}B}}{\sigma_{\bar{x}A-\bar{x}B}}} f(z)dz = 0,0668$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\frac{0,145-m_{\bar{x}A-\bar{x}B}}{\sigma_{\bar{x}A-\bar{x}B}}} f(z)dz = 0,9332$$

وحسب معطيات جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $\int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ نجد:

$$\frac{0,145-m_{\bar{x}_A-\bar{x}_B}}{\sigma_{\bar{x}_A-\bar{x}_B}} = 1,5$$

$$\Leftrightarrow \quad 0,145 - m_{\bar{x}A-\bar{x}B} = 1,5\sigma_{\bar{x}A-\bar{x}B} \ldots\ldots\ldots\ldots ①$$

ولدينا توزيع المعاينة للفرق بين متوسط عمر البطاريات المنتجة من قبل المصنع A ومتوسط عمر البطاريات المنتجة من قبل المصنع B يقترب من التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي بوسط حسابي: $m_{\bar{x}A-\bar{x}B} = m_A - m_B$.

بالتعويض: $m_{\bar{x}A-\bar{x}B} = m_A - 2,4$

ولدينا أيضاً توزيع المعاينة للفرق بين متوسط عمر البطاريات المنتجة من قبل المصنع A ومتوسط عمر البطاريات المنتجة من قبل المصنع B يقترب من التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي بانحراف معياري يقدر بـ: 1,2% من متوسط عمر البطاريات للعينة المختارة من إنتاج المصنع A.

أي أن: $\sigma_{\bar{x}A-\bar{x}B} = 0,012m_A$

وبتعويض $m_{\bar{x}A-\bar{x}B}$ و $\sigma_{\bar{x}A-\bar{x}B}$ بدلالة m_A في المعادلة ①، نحصل على:

$$0,145 - (m_A - 2,4) = 1,5(0,012m_A)$$

$$0,145 - m_A + 2,4 = 1,5(0,012m_A)$$
$$2,545 - m_A = 0,018m_A$$
$$2,545 = 1,018m_A$$
$$\Rightarrow \qquad m_A = \frac{2,545}{1,018}$$
$$\mathbf{m_A = 2,5\ ans}$$

وهو متوسط عمر العينة المختارة من بطاريات السيارة من إنتاج المصنع A.

2- إيجاد توزيع المعاينة للفرق بين المتوسطين:

توزيع المعاينة للفرق بين متوسط عمر البطاريات المنتجة من قبل المصنع A ومتوسط عمر البطاريات المنتجة من قبل المصنع B يقترب من التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي بوسط حسابي: $m_{\bar{x}A - \bar{x}B} = m_A - m_B = 2,5 - 2,4 = \mathbf{0,1}$ وبانحراف معياري:

$\boldsymbol{\sigma}_{\bar{x}A - \bar{x}B} = 0,012m_A = 0,012(2,5) = \mathbf{0,03}$.

3- حساب حجم العينة المختارة من بطاريات المصنع A وحجم العينة المختارة من بطاريات المصنع B:

ليكن n_A وn_B على التوالي حجم العينة المختارة من بطاريات المصنع A وحجم العينة المختارة من بطاريات المصنع B؛

وليكن δ_A وδ_B على التوالي الانحراف المعياري للعينة المختارة من بطاريات المصنع A والانحراف المعياري للعينة المختارة من بطاريات المصنع B؛

- الانحراف المعياري لعمر البطاريات للعينة المختارة من إنتاج المصنع A يساوي شهرين و12 يوماً؛

وهذا يعني أن: $= 2\text{ mois} + 12\text{ jours} = \frac{2}{12}\text{ ans} + \frac{12}{360}\text{ ans} = \frac{72}{360}\text{ ans} = 0,2\text{ans}\ \ \delta_A\text{ ans}$

- الانحراف المعياري لعمر البطاريات للعينة المختارة من إنتاج المصنع B يساوي شهر و6 أيام؛

وهذا يعني أن: $= 1\text{ mois} + 6\text{ jours} = \frac{1}{12}\text{ ans} + \frac{6}{360}\text{ ans} = \frac{36}{360}\text{ ans} = 0,1\text{ans}\ \ \delta_A\text{ ans}$

لدينا: $\sigma_{\bar{x}A - \bar{x}B} = \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}$

$$0,03 = \sqrt{\frac{(0,2)^2}{n_A} + \frac{(0,1)^{2^2}}{2n_A}}$$

$$0,03 = \sqrt{\frac{0,08}{n_A} + \frac{0,01}{2n_A}}$$

$$0,03 = \sqrt{\frac{0,09}{2n_A}}$$

$$0,0009 = \frac{0,09}{2n_A}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{n_A = 50}$$

ومنه، فإن: $\mathbf{n_B} = 2n_A = 2(50) = \mathbf{100}$.

وهما حجم العينة المختارة من بطاريات المصنع A وحجم العينة المختارة من بطاريات المصنع B.

التمرين الثاني:

أ– إيجاد الوسط الحسابي $\bar{x}$ لعمر المصباح وانحرافه المعياري s لهذه العينة المختارة:

لدينا مجال الثقة حول الوسط الحسابي m لمجتمع طبيعي معطى كالتالي:

$$1763,6 \le m \le 1836,4$$

وهذا يعني أن:

$$1763,6 = \bar{x} - ME \;\ldots\ldots\ldots ①$$

$$1836,4 = \bar{x} + ME \;\ldots\ldots\ldots ②$$

حيث ME يمثل هامش الخطأ.

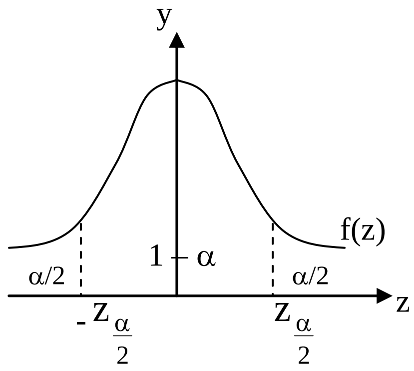
بجمع المعادلتين ① و②، نحصل على:

$$3600 = 2\bar{x} \Rightarrow \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{1800\ heures}$$

وهو الوسط الحسابي لعمر المصباح لهذه العينة المسحوبة من ذلك المجتمع.

وحيث أن الانحراف المعياري σ للمجتمع غير معلوم وحجم العينة كبير n>30، فسوف نعتمد

على جدول التوزيع الطبيعي المعياري لحساب القيمة المعيارية: $z_{\frac{\alpha}{2}}$.



لدينا: $z_{\frac{\alpha}{2}}$ $Pr(-z_{\frac{\alpha}{2}} \le z \le z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$

$$\int_{-z_{\frac{\alpha}{2}}}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1 - \alpha \Leftrightarrow \int_{0}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{1-\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow \int_{z_{\frac{\alpha}{2}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,5 - \frac{1-\alpha}{2}$$

$$\int_{z_{\frac{\alpha}{2}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,5 - \frac{0,9312}{2}$$

$$\int_{z_{\frac{\alpha}{2}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,0344$$

وحسب معطيات جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $\int_{z}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ نجد القيمة المعيارية: =

$z_{\frac{\alpha}{2}}$ 1,82 التي نُعوضها في هامش الخطأ ME مع استبدال الانحراف المعياري σ للمجتمع غير المعلوم

بالانحراف المعياري s للعينة كالتالي: $ME = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$

بالتعويض: $36,4 = 1,82 \frac{s}{\sqrt{225}}$

$$1,82 \frac{s}{15} = 36,4$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{s} = 36,4 \frac{15}{1,82} \mathbf{= 300\ heures}$$

وهو الانحراف المعياري لعمر المصباح لهذه العينة المسحوبة من ذلك المجتمع.

ب– اختبار فرضية أن الدواء الجديد أفضل من الدواء القديم من حيث الفترة اللازمة لإزالة الألم وذلك عند مستوى معنوية 5%:

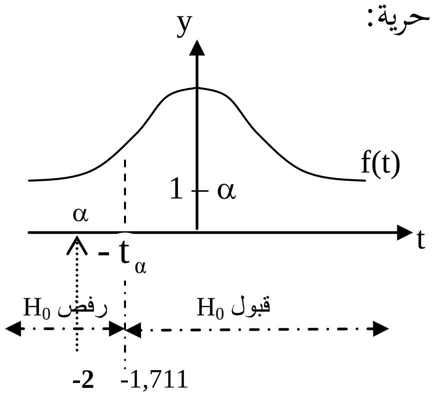
$\bar{x} = 2,3 \quad n = 25 \quad \alpha = 0,05 \quad m_0 = 2,9 \quad s = 1,4$

1– صياغة الفرضيات: $H_0 : m = 2,9$

$H_1 : m < 2,9$

2– تحديد مناطق الرفض والقبول:

حيث أن الانحراف المعياري δ للمجتمع غير معلوم وحجم العينة صغير $n \leq 30$، فسوف نعتمد على جدول توزيع ستودانت لحساب القيمة المعيارية: t_α، بدرجة حرية:



$\nu = n - 1 = 25 - 1 = 24$

لدينا: $Pr(t \geq -t_\alpha) = 1 - \alpha$

وحسب معطيات جدول توزيع ستودانت عند مستوى المعنوية $\alpha = 0,05$ ودرجة الحرية $\nu = 24$ نجد القيمة المعيارية $t_\alpha = 1,711$.

3– حساب إحصاءة الاختبار: $z = \dfrac{\bar{x} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \dfrac{2,3 - 2,9}{\frac{1,5}{\sqrt{25}}} = -2$

4– اتخاذ القرار:

نلاحظ أن قيمة إحصاءة الاختبار 2 – تقع في منطقة الرفض لـ: H_0 وعليه نرفض فرضية العدم بأن متوسط الفترة الزمنية لإزالة الألم للمريض تساوي 2,9 دقيقة وعليه، فالدواء الجديد أفضل من الدواء القديم من حيث الفترة اللازمة لإزالة الألم للمريض بمستوى معنوية 5%.

الجمهوريــة الجزائريــة الديمقراطيــة الشعبيــة

جامعة ابن خلدون - تيارت

2ème Année LMD

2022 - 2023

كلّية العلوم الاقتصادية، العلوم التجارية وعلوم التسيير

-o- امتحان السداسي الأول في مقياس الإحصاء 03 -o-

السنة الثانية ليسانس علوم التسيير

مدة الامتحان: ساعة ونصف

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة العلمية

لا يسمح باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري وجدول توزيع ستودانت.

التمرين الأول:

أ- نفترض أن مجتمع ما يتكون من 720 عنصر له متوسط حسابي: $m = 16$ وانحراف معياري: $\sigma = 6$.

نختار عينة عشوائية من الحجم: $n = 36$ من هذا المجتمع بدون إرجاع.

1- أوجد توزيع المعاينة للوسط الحسابي لمفردات هذه العينة العشوائية.

2- أحسب احتمال أن يكون المتوسط الحسابي لعناصر هذه العينة العشوائية أكبر من 18.

ب- ينتج المصنع Primax مصابيح إنارة لها متوسط عمر 3 سنوات بانحراف معياري 0,5 سنة.

نفس المصابيح تُنتج من الصنع Bixmark بمتوسط عمر 2,5 سنة وبانحراف معياري 0,4 سنة.

- ما هو احتمال أن عينة عشوائية مكونة من 40 مصباح من المصنع Primax يكون لها متوسط عمر على الأقل يزيد 0,45 سنة عن متوسط عمر 64 بطارية من المصنع Bixmark؟

أعطي من جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

$$\int_{-\infty}^{2,05} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,9798 \qquad \int_{-\infty}^{0,53} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,7019$$

التمرين الثاني:

أ- ليكن لدينا مجال الثقة حول الوسط الحسابي m لمجتمع طبيعي معطى كالتالي:

$$5997{,}40 \leq m \leq 6802{,}60$$

1- أوجد الوسط الحسابي $\bar{x}$ للعينة المسحوبة من ذلك المجتمع وهامش الخطأ ME.

2- أوجد الانحراف المعياري s للعينة المسحوبة من ذلك المجتمع، إذا علمت أن: الانحراف المعياري σ لذلك المجتمع غير معلوم ودرجة الحرية ν وفترة الثقة $1-\alpha$ يساويان على التوالي: 8 و97,5%.

ب- من المعلوم أن أحد بطاريات السيارات المستخدمة يمكنها البقاء صالحة في فترة زمنية متوسطها 2 سنة. ولمقارنة هذه البطارية ببطارية جديدة، أُختيرت عينة عشوائية من 29 سيارة وتم استعمال هذا النوع الجديد فيها، فكان المتوسط الحسابي لطول فترة الاستخدام في هذه العينة 2,4 سنة بانحراف معياري 1,7 سنة.

هل تدل هذه النتائج على أن البطارية الجديدة أفضل من البطارية القديمة من حيث الفترة اللازمة للاستخدام؟ وذلك عند مستوى معنوية 5%.

أعطي من جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

$$\int_{-\infty}^{1{,}645} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0{,}9500 \qquad \int_{-\infty}^{2{,}58} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0{,}9951$$

أعطي من جدول توزيع ستودانت:

عندما يكون مستوى المعنوية: $\alpha = 0{,}05$ ودرجة الحرية: $\nu = 28$، تكون: $t_\alpha = 1{,}701$

عندما يكون مستوى المعنوية: $\alpha = 0{,}025$ ودرجة الحرية: $\nu = 8$، تكون: $t_\alpha = 2{,}306$

ملاحظة: المتغير العشوائي الذي يُقترن بعدد البطاريات المستخدمة يخضع لقانون التوزيع الطبيعي.

بالتوفيق

التمرين الأول:

أ– 1– إيجاد توزيع المعاينة للوسط الحسابي لمفردات هذه العينة العشوائية:

توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{x}$ الذي يمثل متوسط المفردات يقترب من التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي x بوسط حسابي: $\mathbf{m_{\bar{x}} = m = 16}$

وحيث أن $0,05N = 0,05(720) = 36$ و$n = 36$، فإن $n = 0,05N$.

وعلى ذلك لا يمكننا إهمال معامل التصحيح في صيغة حساب الانحراف المعياري $\delta_{\bar{x}}$ وبالتالي يكون:

$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{x}}} = \sqrt{\frac{\mathbf{N-n}}{\mathbf{N-1}}}\,\frac{\boldsymbol{\delta}}{\sqrt{\mathbf{n}}} = \sqrt{\frac{720-36}{720-1}}\,\frac{6}{\sqrt{36}} = 1\sqrt{\frac{684}{719}} \approx \mathbf{0,9754}.$$

أ– 2– حساب احتمال أن يكون المتوسط الحسابي لعناصر هذه العينة العشوائية أكبر من 18:

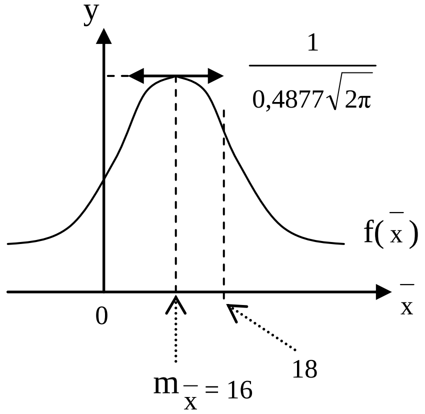
بما أن توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{x}$ يقترب من التوزيع الطبيعي، فيمكن تعريف دالة كثافته الاحتمالية كالآتي:

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{\delta_{\bar{x}}\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{x}-m_{\bar{x}}}{\delta_{\bar{x}}}\right)^2}$$

حيث $m_{\bar{x}}$ و $\sigma_{\bar{x}}$ يمثلان على التوالي المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{x}$.

وعليه، فإن احتمال أن يكون المتوسط الحسابي لعناصر هذه العينة العشوائية أكبر من 18 يمكن حسابه كالتالي:

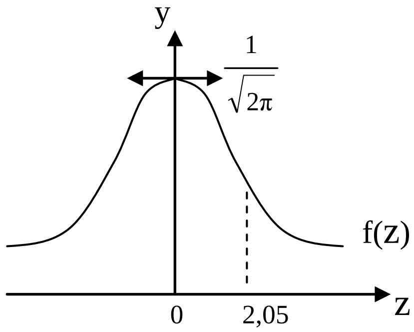
$$\Pr(\bar{x} > 18) = \int_{18}^{+\infty} \frac{1}{0,9754\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{x}-16}{0,9754}\right)^2} d\bar{x}$$



نضع: $z = \dfrac{\bar{x} - 16}{0,9754}$، فيصبح:

$$dz = \frac{1}{0,9754} d\bar{x} \Rightarrow d\bar{x} = 0,9754dz$$

$$\Pr(\bar{x} > 18) = \int_{\frac{18-16}{0,9754}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \int_{2,05}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$



من الشكل نلاحظ أن:

$$\Pr(\bar{x} > 18) = 1 - \int_{-\infty}^{2,05} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1 - \Phi(2,05)$$

وحسب معطيات جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ نجد:

$$\mathbf{\Pr(\bar{x} > 18) = 1 - 0,9798 = 0,0202}$$

وهو احتمال أن يكون المتوسط الحسابي لعناصر هذه العينة العشوائية أكبر من 18.

ب– 1– أن عينة عشوائية مكونة من 40 مصباح من المصنع Primax يكون لها متوسط عمر على الأقل يزيد 0,45 سنة عن متوسط عمر 64 بطارية من المصنع Bixmark:

	المصنع Primax	**المصنع Bixmark**
حجم العينة	$n_P = 40$	$n_B = 64$
الوسط الحسابي	$m_P = 3$	$m_B = 2,5$
الانحراف المعياري	$\sigma_P = 0,5$	$\sigma_B = 0,4$

توزيع المعاينة للفرق بين المتوسطين $\bar{x}_P - \bar{x}_B$ (الفرق بين متوسط عمر المصابيح من المصنع Primax ومتوسط عمر المصابيح من المصنع Bixmark) يقترب من التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي x بوسط حسابي: $\mathbf{m_{\bar{x}P - \bar{x}B}} = m_P - m_B = 3 - 2,5 = \mathbf{0,5}$،

وبانحراف معياري: $\sigma_{\bar{x}P - \bar{x}B} = \sqrt{\frac{\sigma_P^2}{n_P} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}$

$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{x}P - \bar{x}B}} = \sqrt{\frac{(0,5)^2}{40} + \frac{(0,4)^2}{64}} = \mathbf{0,09354}$$

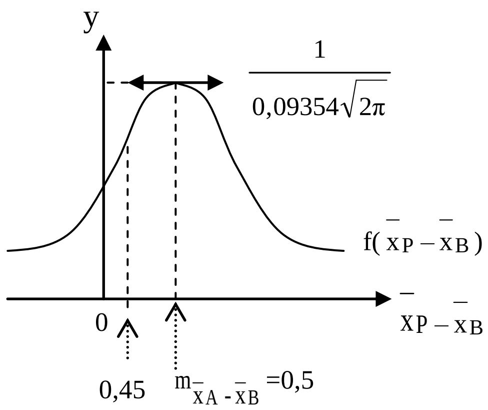
بما أن توزيع المعاينة للفرق بين المتوسطين $\bar{x}P\ \bar{x}B$ – يقترب من التوزيع الطبيعي، فيمكن تعريف دالة كثافته الاحتمالية كالآتي:

$$f(\bar{x}A - \bar{x}B) = \frac{1}{\sigma_{\bar{x}A - \bar{x}B}\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(\bar{x}A - \bar{x}B) - m_{\bar{x}A - \bar{x}B}}{\sigma_{\bar{x}A - \bar{x}B}}\right]^2}$$

حيث $m_{\bar{x}P - \bar{x}B}$ و $\sigma_{\bar{x}A - \bar{x}B}$ يمثلان على التوالي المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للفرق بين الوسطين $\bar{x}P - \bar{x}B$.

وعليه، فإن احتمال أن يزيد الفرق بين متوسط عمر المصابيح من المصنع Primax ومتوسط عمر المصابيح من المصنع Bixmark يمكن حسابه كالتالي:

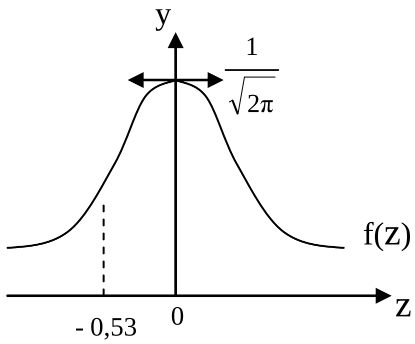
$$\Pr\left[(\bar{x}P - \bar{x}B) > 0,45\right] = \int_{0,45}^{+\infty} \frac{1}{0,09354\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(\bar{x}P - \bar{x}B) - 0,5}{0,09354}\right]^2} d(\bar{x}P - \bar{x}B)$$



نضع: $z = \frac{(\bar{x}P - \bar{x}B) - 0,5}{0,09354}$، فيصبح:

$$dz = \frac{1}{0,09354} d(\bar{x}P - \bar{x}B) \Rightarrow d(\bar{x}P - \bar{x}B) = 0,09354dz$$

$$\Pr\left[(\bar{x}_P - \bar{x}_B) > 0{,}45\right] = \int_{\frac{0{,}45-0{,}5}{0{,}09354}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz = \int_{-0{,}53}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz$$



من الشكل نلاحظ أن:

$$\Pr\left[(\bar{x}_P - \bar{x}_B) > 0{,}45\right] = \int_{-\infty}^{0{,}53} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \Phi(0{,}53)$$

وحسب معطيات جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ نجد:

$$\mathbf{\Pr\left[(\bar{x}_P - \bar{x}_B) > 0{,}45\right] = 0{,}7019}$$

وهو احتمال أن عينة عشوائية مكونة من 40 مصباح من المصنع Primax يكون لها متوسط عمر على الأقل يزيد 0,45 سنة عن متوسط عمر 64 بطارية من المصنع Bixmark.

التمرين الثاني:

أ- 1- إيجاد الوسط الحسابي $\bar{x}$ للعينة المسحوبة من ذلك المجتمع وهامش الخطأ ME:

لدينا مجال الثقة حول الوسط الحسابي m لمجتمع طبيعي معطى كالتالي:

$$5997{,}40 \le m \le 6802{,}60$$

وهذا يعني أن:

$$5997{,}40 = \bar{x} - ME \ldots\ldots\ldots ①$$

$$6802{,}60 = \bar{x} + ME \ldots\ldots\ldots ②$$

حيث $\bar{x}$ يمثل الوسط الحسابي للعينة المسحوبة من ذلك المجتمع وME يمثل هامش الخطأ.

بجمع المعادلتين ① و②، نحصل على:

$$12800 = 2\bar{x} \Rightarrow \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{6400}$$

وهو الوسط الحسابي للعينة المسحوبة من ذلك المجتمع.

بالتعويض في المعادلة رقم ① نحصل على:

$$5997{,}40 = 6400 - ME$$

$$\Rightarrow ME = 6400 - 5997{,}40$$

$$\mathbf{ME = 402{,}60}$$

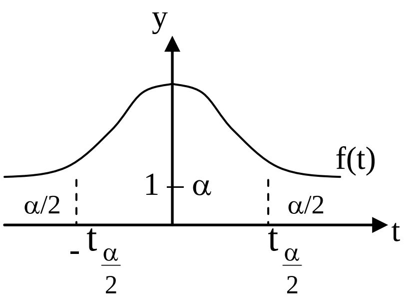
وهو هامش الخطأ.

أ– 2- إيجاد الانحراف المعياري s للعينة المسحوبة من ذلك المجتمع:

حيث أن درجة الحرية $\nu = 8$، فإن حجم العينة المسحوبة من ذلك المجتمع هو: $n = 9$.

وحيث أن الانحراف المعياري σ للمجتمع غير معلوم وحجم العينة صغير $n < 30$، فسوف نعتمد على جدول توزيع ستودانت لحساب القيمة المعيارية: $t_{\frac{\alpha}{2}}$، بدرجة حرية:

$$\nu = n - 1 = 9 - 1 = 8$$



لدينا: $t_{\frac{\alpha}{2}}$ $\Pr(-t_{\frac{\alpha}{2}} \le t \le t_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$

وحسب معطيات جدول توزيع ستودانت عند مستوى المعنوية $\alpha = 0{,}025$ ودرجة الحرية $\nu = 8$ نجد القيمة المعيارية $t_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}306$ التي نُعوضها في فترة الثقة حول الوسط الحسابي m مع استبدال الانحراف المعياري σ للمجتمع غير المعلوم بالانحراف المعياري s للعينة، حيث يكون هامش الخطأ ME كالتالي:

$$ME = t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

بالتعويض: $402{,}60 = 2{,}306 \dfrac{s}{\sqrt{9}}$

$$402{,}60 = \frac{2{,}306s}{3}$$

$$1207{,}8 = 2{,}306s \Rightarrow s = \frac{1207{,}8}{2{,}306}$$

$$\mathbf{s \approx 523{,}76}$$

وهو الانحراف المعياري s للعينة المسحوبة من ذلك المجتمع.

ب– اختبار فرضية أن البطارية الجديدة أفضل من البطارية القديمة من حيث الفترة اللازمة للاستخدام وذلك عند مستوى معنوية 5%:

$s = 1,7 \qquad m_0 = 2 \quad \bar{x} = 2,4 \qquad \alpha = 0,05 \qquad n = 29$

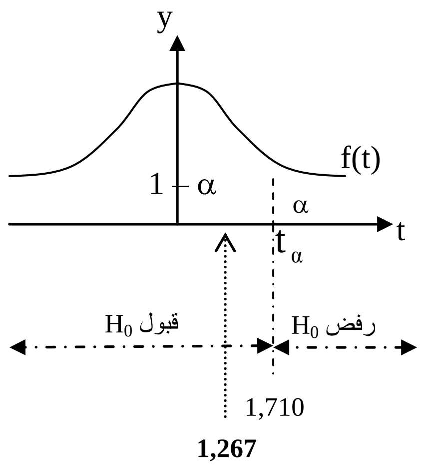
1– صياغة الفرضيات: $H_0 : m = 2$

$H_1 : m > 2$

2– تحديد مناطق الرفض والقبول:

حيث أن الانحراف المعياري σ للمجتمع غير معلوم وحجم العينة صغير $n \leq 30$، فسوف نعتمد على جدول توزيع ستودانت لحساب القيمة المعيارية: t_α، بدرجة حرية:

$$\nu = n - 1 = 29 - 1 = 28$$



لدينا: $Pr(t \leq t_\alpha) = 1 - \alpha$

وحسب معطيات جدول توزيع ستودانت عند مستوى المعنوية $\alpha = 0,05$ ودرجة الحرية $\nu = 28$ نجد القيمة المعيارية $t_\alpha = 1,710$.

3– حساب إحصاءة الاختبار: $t = \dfrac{\bar{x} - m}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}} = \dfrac{2,4 - 2}{\dfrac{1,7}{\sqrt{29}}} = 1,267$

4– اتخاذ القرار:

نلاحظ أن قيمة إحصاءة الاختبار 1,267 تقع في منطقة القبول لـ: H_0 وعليه نقبل فرضية العدم بأن متوسط الفترة الزمنية لاستخدام البطارية تساوي 2 سنة وعليه، فالبطارية القديمة أفضل من البطارية الجديدة من حيث الفترة اللازمة للاستخدام بمستوى معنوية 5%.

قائمة المراجع

المراجع باللغة العربية

*- ثروت محمد عبد المنعم، مدخل حديث للإحصاء والاحتمالات ، دار ومكتبة العبيكان للنشر والتوزيع، الرياض 2007.

*- مصطفى عبد الحفيظ، نظرية الاحتمالات، الجزئين الأول والثاني، الطبعة الثانية، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر 2004.

*- محمد شفيق ياسين وأنور اللحام، مبادئ الإحصاء والاحتمال، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر 1991.

*- غازي عطية زراك، مبادئ الإحصاء التطبيقي لغير الاختصاص، الطبعة الأولى، دار الكتب والوثائق، بغداد 2015.

المراجع باللغة الأجنبية

*- Corina Reischer, Raymond Leblanc, Bruno Rémillard et Denis Larocque, Théorie des probabilités – Problèmes et solutions, Presses de l'Université du Québec, Québec 2002.

*- Daniel Fredon, Myriam Maumy Bertrand et Frédéric Bertrand, Mathématiques – Statistique et probabilités, Edition Dunod, Paris 2009.

*- Jean Pierre Lecoutre, Statistique et probabilités – 70% Applications et 30% Cours, 4ème Edition, Edition Dunod, Paris 2008.

*- Philippe Tassi et Sylvia Legait, Théorie des Probabilités – en vue des applications statistiques, Edition Technip, Paris 1990.